Материалы для проведения заключительного этапа

XXXVII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2010–2011 учебный год

Первый день

Великий Новгород, 25–29 апреля 2011 г.

Москва, 2011

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа XXXVII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н.Х. Агаханов, А.В. Акопян, А.В. Антропов, С.Л. Берлов, И.И. Богданов, С.Г. Волчёнков, А.И. Гарбер, А.С. Голованов, О.Ю. Дмитриев, В.Л. Дольников, С.А. Дориченко, М.А. Евдокимов, Л.А. Емельянов, Р.Н. Карасёв, Д.В. Карпов, П.А. Кожевников, П.Ю. Козлов, А.Н. Магазинов, П.В. Мартынов, В.Б. Мокин, Е.Г. Молчанов, В.А. Омельяненко, А.В. Пастор, Ф.В. Петров, О.К. Подлипский, К.А. Праведников, И.С. Рубанов, В.А. Сендеров, К.А. Сухов, Д.А. Терёшин, С.И. Токарев, Б.В. Трушин, Д.Г. Храмцов, В.З. Шарич, В.А. Шмаров.

В скобках после каждой задачи указана фамилия ее автора.

Компьютерный макет: И.И. Богданов.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Запрещается публикация или размещение в сети Интернет условий или решений задач олимпиады.

Условия задач

9 класс

9.1. Квадратный трёхчлен $P(x)$ с единичным старшим коэффициентом таков, что многочлены $P(x)$ и $P(P(P(x)))$ имеют общий корень. Докажите, что $P(0) \cdot P(1) = 0$. (*А. Храбров*)

9.2. Дан остроугольный треугольник ABC. Окружность, проходящая через вершину B и центр O его описанной окружности, вторично пересекает стороны BC и BA в точках P и Q соответственно. Докажите, что точка пересечения высот треугольника POQ лежит на прямой AC. (*Т. Емельянова, Л. Емельянов*)

9.3. На доске нарисован выпуклый 2011-угольник. Петя последовательно проводит в нём диагонали так, чтобы каждая вновь проведённая диагональ пересекала по внутренним точкам не более одной из проведённых ранее диагоналей. Какое наибольшее количество диагоналей может провести Петя? (*С. Берлов*)

9.4. Существуют ли три взаимно простых в совокупности натуральных числа, квадрат каждого из которых делится на сумму двух оставшихся? (*С. Берлов*)

10 класс

10.1. В каждой клетке таблицы, состоящей из 10 столбцов и n строк, записана цифра. Известно, что для любой строки A и любых двух столбцов найдётся строка, отличающаяся от A ровно в этих двух столбцах. Докажите, что $n \geqslant 512$. (*Р. Карасёв*)

10.2. На доске написаны девять приведённых квадратных трёхчленов: $x^2+a_1x+b_1$, $x^2+a_2x+b_2$, $\ldots$, $x^2+a_9x+b_9$. Известно, что последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_9$ и $b_1, b_2, \ldots, b_9$ — арифметические прогрессии. Оказалось, что сумма всех девяти трёхчленов имеет хотя бы один корень. Какое наибольшее количество исходных трёхчленов может не иметь корней? (*И. Богданов*)

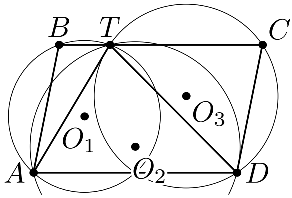
10.3. Назовём компанию *k-неразбиваемой*, если при любом разбиении её на k групп в одной из групп найдутся два знакомых человека. Дана 3-неразбиваемая компания, в которой нет четырёх попарно знакомых человек. Докажите, что её можно разделить на две компании, одна из которых 2-неразбиваемая, а другая — 1-неразбиваемая. (*В. Дольников*)

10.4. Периметр треугольника ABC равен 4. На лучах AB и AC отмечены точки X и Y так, что $AX = AY = 1$. Отрезки BC и XY пересекаются в точке M. Докажите, что периметр одного из треугольников ABM и ACM равен 2. (*В. Шмаров*)

11 класс

11.1. Натуральные числа d и d', $d' > d$ — - делители натурального числа n. Докажите, что $d' > d + \frac{d^2}{n}$. (*А. Голованов*)

11.2. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ ($\angle A < 90^\circ$) отмечена точка T так, что треугольник ATD — остроугольный. Пусть O_1, O_2 и O_3 — центры описанных окружностей треугольников ABT, DAT и CDT соответственно (см. рисунок). Докажите, что точка пересечения высот треугольника $O_1O_2O_3$ лежит на прямой AD. (*Т. Емельянова*)



11.3. В Академии Наук 999 академиков. Каждая научная тема интересует ровно троих академиков, и у каждых двух академиков есть ровно одна тема, интересная им обоим. Докажите, что можно выбрать 250 тем из их общей области научных интересов так, чтобы каждый академик интересовался не более, чем одной из них. (*А. Магазинов*)

11.4. По шоссе в одном направлении едут 10 автомобилей. Шоссе проходит через несколько населённых пунктов. Каждый из автомобилей едет с некоторой постоянной скоростью в населённых пунктах и с некоторой другой постоянной скоростью вне населённых пунктов. Для разных автомобилей эти скорости могут отличаться. Вдоль шоссе расположено 2011 флажков. Известно, что каждый автомобиль проехал мимо каждого флажка, причём около флажков обгонов не происходило. Докажите, что мимо каких-то двух флажков автомобили проехали в одном и том же порядке. (*С. Берлов*)

Решения задач

9 класс

9.1. Пусть t — общий корень данных многочленов. Тогда $0 = P(P(P(t))) = P(P(0))$. Пусть $P(x) = x^2 + ax + b$; тогда $P(0) = b$, $P(1) = a + b + 1$, а значит, $0 = P(P(0)) = P(b) = ab + b^2 + b = b(a + b + 1) = P(0) \cdot P(1)$, что и требовалось доказать.

9.2. Обозначим $\angle OBA = \angle OAB = \alpha$, $\angle OBC = \angle OCB = \gamma$; тогда $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB = 90^\circ - \alpha$. Поскольку четырёхугольник $BPOQ$ вписан, $\angle OPQ = \alpha$ и $\angle OQP = \gamma$. Пусть OO_1 — высота треугольника OPQ, а H — точка пересечения прямых OO_1 и AC (см. рис. 1). Без ограничения общности, точка H лежит на луче CA.

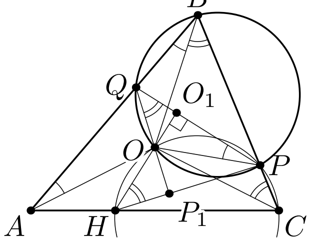


Рис. 1

Угол POH — внешний для $\triangle POO_1$, поэтому $\angle POH = 90^\circ + \alpha = 180^\circ - \angle HCP$. Значит, четырёхугольник $CHOP$ вписан, и $\angle PHO = \angle PCO = \gamma$. Пусть P_1 — точка пересечения прямых OQ и PH. Вновь по свойству внешних углов $\angle QP_1H = \angle QPH + \angle PQO = \angle QPH + \angle PHO_1 = \angle HO_1Q = 90^\circ$. Итак, $PH \perp OQ$, то есть H — точка пересечения высот треугольника OPQ. При этом она лежит на прямой AC, что и требовалось доказать.

Замечание. Нетрудно показать, что треугольники ABC и PHQ подобны.

9.3. **Ответ.** 4016.

Первое решение. Покажем, что в выпуклом n-угольнике максимальное количество диагоналей, которое можно провести указанным способом, равно $2n - 6$; при $n = 2011$ тогда получится указанный ответ. Пусть $A_1A_2\ldots A_n$ — данный многоугольник. Тогда Петя может провести последовательно диагонали A_2A_4, A_3A_5, A_4A_6, $\ldots$, $A_{n-2}A_n$, а затем — диагонали A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5, $\ldots$, A_1A_{n-1}, итого $2n-6$ диагоналей. На рисунке приведён пример при $n=9$.

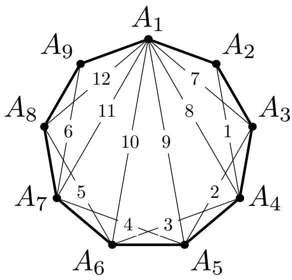


Рис. 2

Покажем теперь индукцией по n, что больше $2n-6$ диагоналей в выпуклом n-угольнике провести описанным способом нельзя. База при $n=3$ тривиальна. Для перехода рассмотрим процесс проведения диагоналей в многоугольнике $A_1A_2\ldots A_n$. Пусть для определённости A_1A_k — последняя проведённая диагональ. Тогда по условию она пересекает не более, чем одну проведённую ранее диагональ (обозначим её d, если она существует).

Далее, все диагонали, кроме A_1A_k и, возможно, d, проводились либо в k-угольнике $A_1A_2\ldots A_k$, либо в $(n+2-k)$-угольнике $A_kA_{k+1}\ldots A_nA_1$, при этом в каждом из этих многоугольников они проводились с выполнением условий. Значит, по предположению индукции, этих диагоналей не больше $(2k-6)+(2(n+2-k)-6)=2n-8$. Учитывая две диагонали A_1A_k и d, получаем, что общее количество не больше $2n-8+2=2n-6$, что и требовалось.

Второе решение. Приведём другое доказательство того, что в выпуклом n-угольнике можно провести не более $2n-6$ диагоналей с соблюдением условия задачи.

Будем красить проводимые диагонали в красный и синий цвета так. Первую диагональ окрасим синим; далее, если вновь проведённая диагональ пересекает синюю, то окрасим её красным, иначе — синим. Тогда ясно, что одноцветные диагонали не будут пересекаться по внутренним точкам.

Докажем, что диагоналей каждого цвета не больше $n-3$; отсюда будет следовать, что всего их не более $2(n-3)$. Действительно, пусть есть k одноцветных диагоналей. Поскольку они не имеют общих внутренних точек, они разбивают n-угольник на $k+1$ многоугольников. У каждого многоугольника хотя бы три стороны, значит, суммарное количество S их сторон не меньше $3(k+1)$. С другой стороны, стороны этих многоугольников — это наши диагонали (каждая посчитана по два раза) и стороны исходного n-угольника (посчитанные по одному разу). Значит, $S = n + 2k$. Итак, $n + 2k \geqslant 3(k + 1)$, или $k \leqslant n - 3$, что и требовалось доказать.

9.4. **Ответ.** Не существуют.

Первое решение. Предположим противное: пусть нашлись такие числа a, b, c. Заметим, что числа $a + b$, $b + c$, $c + a$ попарно взаимно просты. В самом деле, пусть, скажем, числа $a + b$, $b + c$ делятся на некоторое простое p. Поскольку $c^2 \vdots (a+b)$, $a^2 \vdots (b+c)$, то числа c и a также делятся на p, а тогда и $b = (a + b) - a$ на него делится, что противоречит условию.

Далее, поскольку $a^2 \vdots (b + c)$, число $(a + b + c)^2 = a^2 + (b + c)(2a + b + c)$ делится на $b+c$. Аналогично, оно делится на $a + b$ и на $c + a$. Так как последние три числа попарно взаимно просты, $(a + b + c)^2$ делится на $(a + b)(a + c)(b + c)$; в частности, $(a + b + c)^2 \geqslant (a + b)(b + c)(c + a)$. С другой стороны, ясно, что все числа a, b, c не меньше 2, значит,

$$(a+b)(b+c)(c+a) = (a^2b+b^2c+c^2a)+(ab^2+bc^2+ca^2)+2abc > \\ > (2a^2 + 2b^2 + 2c^2) + (2ab + 2bc + 2ca) > (a + b + c)^2.$$

Противоречие.

Второе решение. Как и в первом решении, заметим, что числа $a+b$, $b+c$, $c+a$ попарно взаимно просты. Пусть $a \geqslant b \geqslant c$. Заметим, что число $b^2+c^2-a^2 = (b+a)(b-a)+c^2$ делится на $b+a$; аналогично, оно делится на $c+a$. Значит, $b^2+c^2-a^2 \vdots (a+b)(a+c)$. С другой стороны,

$$-(a + b)(a + c) < -a^2 < b^2 + c^2 - a^2 \leqslant a^2 < (a + b)(a + c).$$

Такое может случиться лишь при $b^2 + c^2 - a^2 = 0$, то есть при $a^2 = b^2 + c^2$.

Итак, $a^2 = b^2 + c^2 \vdots (b + c)$. Тогда число $2b^2 = (b^2 + c^2) + (b - c)(b + c)$ также делится на $b + c$. Поскольку числа b и $b + c$ взаимно просты, $2 \vdots (b + c)$, откуда $b = c = 1$. Но тогда $1 = c^2$ не может делиться на $a + b > 1$, противоречие.

10 класс

10.1. Пусть R_0 — первая строка таблицы. Рассмотрим любой набор из чётного количества столбцов и пронумеруем их слева направо: $C_1, \ldots, C_{2m}$. Тогда в таблице есть строка R_1, отличающаяся от R_0 ровно в столбцах C_1 и C_2; далее, есть строка R_2, отличающаяся от R_1 ровно в столбцах C_3 и C_4; ...; наконец, есть строка R_m, отличающаяся от R_{m-1} ровно в столбцах C_{2m-1} и C_{2m} (если $m = 0$, то $R_m = R_0$). Итак, строка R_m отличается от R_0 ровно в столбцах $C_1, C_2, \ldots, C_{2m}$. Значит, строки R_m, построенные по различным наборам столбцов, различны. Поскольку количество наборов из чётного числа столбцов равно $2^{10}/2 = 512$, то и количество строк в таблице не меньше 512.

Замечание. В таблице может быть ровно 512 строк — например, если в её строках записаны все 512 последовательностей из 10 нулей и единиц, среди которых чётное число нулей.

10.2. **Ответ.** 4.

Обозначим $P_i(x) = x^2 + a_i x + b_i$, $P(x) = P_1(x) + \ldots + P_9(x)$. Заметим, что $P_i(x) + P_{10-i}(x) = 2x^2 + (a_i + a_{10-i})x + (b_i + b_{10-i}) = 2P_5(x)$. Значит, $P(x) = 9P_5(x)$, и условие равносильно тому, что $P_5(x)$ имеет хотя бы один корень.

Обозначим через x_0 какой-нибудь из его корней. Тогда $P_i(x_0) + P_{10-i}(x_0) = 2P_5(x_0) = 0$, то есть либо $P_i(x_0) \leqslant 0$, либо $P_{10-i}(x_0) \leqslant 0$. Поскольку старшие коэффициенты трёхчленов положительны, из этого следует, что в каждой из пар (P_1, P_9), (P_2, P_8), (P_3, P_7), (P_4, P_6) хотя бы один из трёхчленов имеет корень. Значит, есть не меньше пяти трёхчленов, имеющих хотя бы по одному корню. Поэтому есть не более четырёх трёхчленов без корней.

Осталось привести пример, когда ровно пять трёхчленов (и один из них — P_5) имеют хотя бы по одному корню. Годятся, например, трёхчлены $x^2 - 4$, $x^2 - 3$, $x^2 - 2$, ..., $x^2 + 4$.

10.3. Предположим противное. Рассмотрим граф G, в котором люди являются вершинами, а два человека соединены ребром, если они знакомы. Тогда граф k-разбиваем, если его вершины можно правильно окрасить в k цветов (т. е. окрасить так, чтобы соседние вершины имели разные цвета). Мы будем пользоваться следующей известной леммой.

Лемма. *Пусть в графе нет циклов нечётной длины. Тогда его вершины можно правильно раскрасить двумя красками.*

Доказательство. Ясно, что достаточно доказать лемму для связного графа. *Расстоянием* между двумя вершинами X и Y назовём наименьшую длину пути, соединяющего эти вершины.

Зафиксируем некоторую вершину A, и покрасим все вершины, находящиеся на нечётном расстоянии от A, в красный цвет, а остальные вершины — в синий цвет. Докажем, что указанная раскраска — искомая. Предположим противное — имеется ребро, соединяющее, скажем, красные вершины B и C. Рассмотрим кратчайшие пути $A = B_0, B_1, \ldots, B_{2n-1} = B$ и $A = C_0$, $C_1, \ldots, C_{2m-1} = C$, ведущие из A в B и в C. Взяв наибольший индекс i такой, что $B_i = C_i$, получим цикл нечётной длины B_i, $B_{i+1}, \ldots, B_{2n-1}, C_{2m-1}, C_{2m-2}, \ldots, C_i = B_i$. Противоречие. $\square$

По лемме, в нашем графе G есть нечётный цикл — иначе его вершины можно окрасить даже в два цвета. Выберем в G нечётный цикл C минимальной длины n. Тогда не существует рёбер, соединяющих вершины этого цикла, кроме рёбер самого цикла. Действительно, любое такое ребро разбивает цикл на два меньших по длине, причём один из них нечётен. Значит, в этом случае нашёлся бы нечётный цикл меньшей длины.

Далее, покажем, что любая вершина x, не принадлежащая C, соединена не более, чем с двумя вершинами C. Если C содержит три вершины, то утверждение верно, иначе x вместе с вершинами C образует компанию из 4 попарно знакомых человек.

Пусть теперь в C больше трёх вершин. Предположим, что x соединена с вершинами v_1, v_2, v_3 этого цикла. Участок цикла между какими-то двумя из них (скажем, между v_1 и v_2) содержит нечётное количество рёбер d. Если $d < n-2$, то этот участок вместе с вершиной x образует нечётный цикл длины $d + 2 < n$, что невозможно. Значит, $d \geqslant n - 2$ ребра, а это значит, что вершины v_1, v_3, v_2 идут в цикле подряд. Но тогда найдётся цикл v_1, v_3, x длины 3, что невозможно.

Теперь мы можем предъявить требуемое разбиение: поместим в одну группу вершины цикла C, а в другую (назовём её D) — все остальные. Вершины цикла C, очевидно, нельзя правильно окрасить в два цвета. Осталось показать, что между вершинами группы D есть ребро (тогда она 1-неразбиваема). Предполагая противное, покажем, что G можно окрасить в три цвета. Сначала окрасим все вершины C, кроме одной, попеременно в цвета 1 и 2, а оставшуюся окрасим в цвет 3; поскольку между этими вершинами нет других рёбер, раскраска этого цикла — правильная. Окрасить теперь вершины группы D по очереди. Каждая очередная вершина соединена не более, чем с двумя вершинами из C, и не соединена с вершинами из D; значит, можно выбрать для неё цвет, отличный от цветов её соседей. Итого, граф G можно правильно окрасить в три цвета, что противоречит условию.

10.4. Поскольку отрезки BC и XY пересекаются, без ограничения общности можно считать, что $AB > AX$ и $AC < AY$.

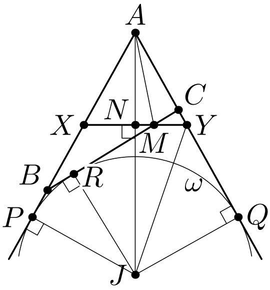


Рис. 3

Пусть вневписанная окружность ω исходного треугольника касается стороны BC в точке R, а продолжений сторон AB и AC в точках P и Q соответственно. Пусть J — центр ω, а r — её радиус. Пусть также N — середина XY; из симметрии N лежит на AJ, и $AN \perp XY$. Имеем $AP = AQ = \frac{1}{2}(AP + AQ) = \frac{1}{2}(AB + BP + AC + CQ) = \frac{1}{2}(AB + BR + AC + CR) = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) = 2$. Отсюда $AY = YQ = 1$.

Теперь по теореме Пифагора получаем $MR^2 = MJ^2 - JR^2 = (MN^2 + NJ^2) - r^2 = MN^2 + (YJ^2 - YN^2) - r^2 = MN^2 + (YQ^2 + r^2) - (YA^2 - AN^2) - r^2 = MN^2 + AN^2 = AM^2$, ибо $YA = YQ$.

Отсюда $AM = MR$, и периметр треугольника ACM равен

$AC + CM + AM = AC + CM + MR = AC + CR = AC + CQ =$
$= AQ = 2$.

Замечание. Вычисления можно сократить, заметив, что прямая XY — радикальная ось окружности ω и точки A. Поскольку M лежит на этой прямой, получаем $MR = MA$.

11 класс

11.1. Поскольку числа $f = n/d$ и $f' = n/d'$ целые, а $f > f'$, имеем $f - f' \geqslant 1$, или

$$1 \leqslant \frac{n}{d} - \frac{n}{d'} = \frac{(d'-d)n}{dd'} < \frac{(d'-d)n}{d^2}.$$

Домножая на $\frac{d^2}{n}$, получаем $d' - d > \frac{d^2}{n}$, что и требовалось доказать.

11.2. **Первое решение.** Докажем сначала следующий известный факт.

Лемма. *Ортоцентр треугольника после отражения относительно стороны попадает на описанную окружность.*

Доказательство. Рассмотрим случай остроугольного треугольника (см. рис. 4; остальные случаи аналогичны). Имеем $\angle AH'C = \angle AHC = \angle A_1HC_1 = 180^\circ - \angle ABC$; это и означает, что точки A, B, C, H' лежат на одной окружности. □

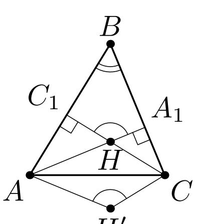


Рис. 4

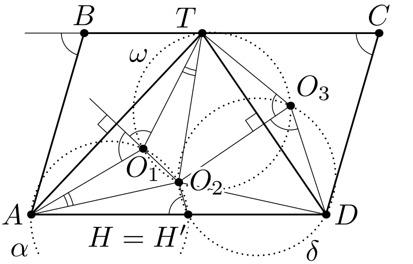


Рис. 5

Перейдём к решению задачи. Заметим, что O_1O_2 и O_3O_2 — серединные перпендикуляры к отрезкам AT и DT. Значит, $\angle AO_1O_2 = \angle TO_1O_2 = \angle TBA$ (поскольку угол TO_1A — центральный для описанной окружности треугольника ABT). Аналогично, $\angle DO_3O_2 = \angle TO_3O_2 = \angle TCD$. Отсюда $\angle TO_1O_2 +$

$+ \angle TO_3O_2 = 180°$. Итак, точки T, O_1, O_2, O_3 лежат на одной окружности ω. Из симметрии, $\angle O_1TO_2 = \angle O_1AO_2$. Значит, окружность α, описанная около треугольника AO_1O_2, равна ω. Аналогично, окружность δ, описанная около треугольника DO_2O_3, также равна ω.

По лемме, ортоцентр H треугольника $O_1O_2O_3$ лежит на окружностях α и δ, то есть является второй точкой их пересечения. Пусть H' — вторая точка пересечения α с прямой AD. Тогда $\angle AH'O_2 = 180° - \angle AO_1O_2 = \angle DO_3O_2$, поэтому H' лежит на δ. Значит, $H' = H$, и H лежит на AD.

Второе решение. Опять же заметим, что O_1O_2 и O_2O_3 — серединные перпендикуляры к отрезкам AT и DT. Значит, высоты из вершин O_1 и O_3 треугольника $O_1O_2O_3$ параллельны соответственно прямым DT и AT. Пусть H — точка пересечения высоты из точки O_1 со стороной AD; наша задача, таким образом — показать, что $O_3H \parallel AT$.

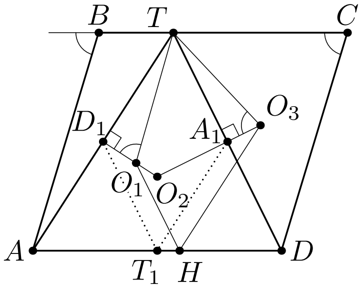


Рис. 6

Обозначим через A_1, D_1 и T_1 середины сторон DT, AT и AD треугольника ADT соответственно, а через α, δ, τ — его углы при вершинах A, D, T соответственно. Тогда $\angle TO_1D_1 = 180° - \angle ABC = \angle BCD = \angle TO_3A_1$. Значит, прямоугольные треугольники TO_1D_1 и TO_3A_1 подобны, и $\frac{D_1O_1}{A_1O_3} = \frac{D_1T}{A_1T} = \frac{AT}{DT} = \frac{\sin\delta}{\sin\alpha}$.

Далее, поскольку $O_1H \parallel D_1T_1$, расстояния от точек O_1 и H до прямой D_1T_1 равны, то есть $\frac{T_1H}{D_1O_1} = \frac{\sin O_1D_1T_1}{\sin HT_1D_1} = \frac{\cos\tau}{\sin\delta}$. В итоге имеем

$$\frac{T_1H}{A_1O_3} = \frac{T_1H}{D_1O_1} \cdot \frac{D_1O_1}{A_1O_3} = \frac{\cos\tau}{\sin\delta} \cdot \frac{\sin\delta}{\sin\alpha} = \frac{\cos\tau}{\sin\alpha},$$

или $\frac{T_1H}{A_1O_3} = \frac{\sin O_3A_1T_1}{\sin A_1T_1H}$. Это означает, что O_3 и H равноудалены от A_1T_1, то есть $O_3H \parallel A_1T_1$, что и требовалось доказать.

11.3. Будем говорить, что две темы *пересекаются* по академику, если он интересуется обеими этими темами.

Выберем наибольшее возможное количество непересекающихся тем; пусть это темы $T_1, \ldots, T_k$. Предположим, что $k \leqslant 249$. Обозначим через S множество всех академиков, не интересующихся этими темами; тогда их ровно $s = 999 - 3k \geqslant 252$.

Для каждых двух академиков $a, b \in S$ существует единственная тема $T(a, b)$, интересующая обоих. При этом третий академик, заинтересованный ею, не должен принадлежать S, иначе $T(a, b)$ можно добавить к исходным k темам. Значит, его интересует какая-то тема T_i. Сопоставим эту тему (и этого академика) паре (a, b).

Итак, каждой из $\dfrac{s(s-1)}{2}$ пар академиков из S сопоставлена одна из k тем $T_1, \ldots, T_k$; значит, какая-то тема T_i сопоставлена не менее, чем $\dfrac{s(s-1)}{2k} > \frac{s}{2}$ парам. Обозначим эти пары (a_1, b_1), …, (a_d, b_d); пусть T_i интересует академиков x, y, z. Поскольку $d > \frac{s}{2} > 6$, один из x, y, z сопоставлен хотя бы трём парам (a_j, b_j); пусть, скажем, x сопоставлен парам (a_1, b_1), …, (a_p, b_p) $(p \geqslant 3)$, а остальным парам сопоставлены y или z.

Заметим, что все пары (a_1, b_1), …, (a_p, b_p) не пересекаются: если бы академик a находился в двух из них, то академиков a и x интересовали бы две общих темы. Значит, $p \leqslant \frac{s}{2} < d$, и паре (a_{p+1}, b_{p+1}) сопоставлен, скажем, академик y. Но тогда (a_{p+1}, b_{p+1}) не пересекается с одной из пар (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), скажем, с (a_1, b_1). Значит, можно из нашего набора тем выбросить T_i и добавить непересекающиеся темы $T(a_1, b_1)$ и $T(a_{p+1}, b_{p+1})$, увеличив количество непересекающихся тем. Противоречие с исходным выбором.

11.4. Введём в пространстве систему координат $Oxyt$. Обозначим через M точку шоссе, в которой в начальный момент находится первый автомобиль. Каждой точке шоссе A сопоставим точку T_A на плоскости Oxy с координатами $T_A(x_A, y_A)$, где x_A — суммарная длина участков пути AM в населённых пунктах, а y_A — вне населённых пунктов. Тогда шоссе изображается некоторой ломаной на этой плоскости.

Далее, для i-й машины нарисуем график её движения, состоящий из всех точек $X_{i,A} = (x_A, y_A, t_{i,A})$, где $t_{i,A}$ — момент времени, в который эта машина находилась в точке A. Если эта машина была в точке M в момент t_i, а скорости этой машины в населённых пунктах и вне их равны u_i и v_i, то $t_{i,A} = t_i + x_A/u_i + y_A/v_i$; таким образом, весь график движения i-й машины лежит в плоскости $t = t_i + x/u_i + y/v_i$. Обозначим эту плоскость через α_i.

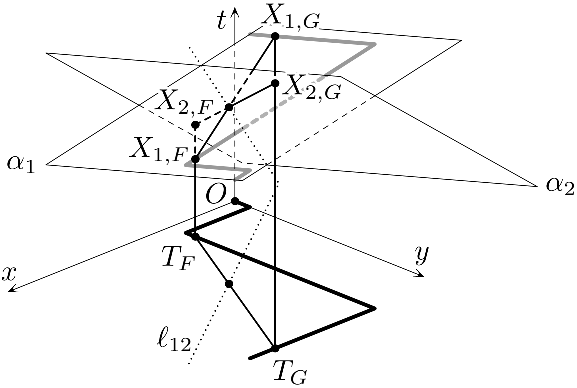


Рис. 7

Рассмотрим теперь порядок, в котором машины проедут мимо некоторого флажка F. Он совпадает с порядком, в котором плоскости α_i будут пересекать прямую, параллельную Ot и проходящую через точку T_F. Пусть для двух флажков F и G этот порядок различается (скажем, 1-я и 2-я машины проехали мимо него в разном порядке). Тогда отрезки $X_{1,F}X_{1,G}$ и $X_{2,F}X_{2,G}$ пересекаются (см. рис. 7). Таким образом, если спроецировать прямую пересечения плоскостей α_1 и α_2 на плоскость Oxy, то точки T_F и T_G будут лежать по разные стороны от полученной проекции ℓ_{12}.

Итак, рассмотрим все прямые ℓ_{ij}. Нетрудно показать индукцией по n, что n прямых разбивают плоскость не более, чем на $\dfrac{n(n+1)}{2} + 1$ часть. Поскольку количество наших прямых не больше $C_{10}^2 = 45$, они разобьют плоскость не более, чем на $\frac{45 \cdot 46}{2} + 1 = 1036$ частей. Значит, найдутся такие флажки F и G, что точки T_F и T_G попадают в одну часть. Тогда ни одна проекция прямых их не разделяет, поэтому на этих флажках порядок машин будет одинаков.

Замечание. Заметим, что 45 прямых разбивают плоскость ровно на 1036 частей только тогда, когда никакие две из них не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. В нашем случае для любых трёх плоскостей α_i, α_j, α_k прямые их пересечения либо попарно параллельны, либо пересекаются в одной точке. Значит, этим же свойством обладают и их проекции; таким образом, прямые из решения разобьют плоскость несколько меньше, чем на 1036 частей.