9 класс

Первый день

9.1. Квадратный трёхчлен $P(x)$ с единичным старшим коэффициентом таков, что многочлены $P(x)$ и $P(P(P(x)))$ имеют общий корень. Докажите, что $P(0) \cdot P(1) = 0$.

9.2. Дан остроугольный треугольник ABC. Окружность, проходящая через вершину B и центр O его описанной окружности, вторично пересекает стороны BC и BA в точках P и Q соответственно. Докажите, что точка пересечения высот треугольника POQ лежит на прямой AC.

9.3. На доске нарисован выпуклый 2011-угольник. Петя последовательно проводит в нём диагонали так, чтобы каждая вновь проведённая диагональ пересекала по внутренним точкам не более одной из проведённых ранее диагоналей. Какое наибольшее количество диагоналей может провести Петя?

9.4. Существуют ли три взаимно простых в совокупности натуральных числа, квадрат каждого из которых делится на сумму двух оставшихся?

XXXVII Всероссийская математическая олимпиада школьников

9 класс

Первый день

9.1. Квадратный трёхчлен $P(x)$ с единичным старшим коэффициентом таков, что многочлены $P(x)$ и $P(P(P(x)))$ имеют общий корень. Докажите, что $P(0) \cdot P(1) = 0$.

9.2. Дан остроугольный треугольник ABC. Окружность, проходящая через вершину B и центр O его описанной окружности, вторично пересекает стороны BC и BA в точках P и Q соответственно. Докажите, что точка пересечения высот треугольника POQ лежит на прямой AC.

9.3. На доске нарисован выпуклый 2011-угольник. Петя последовательно проводит в нём диагонали так, чтобы каждая вновь проведённая диагональ пересекала по внутренним точкам не более одной из проведённых ранее диагоналей. Какое наибольшее количество диагоналей может провести Петя?

9.4. Существуют ли три взаимно простых в совокупности натуральных числа, квадрат каждого из которых делится на сумму двух оставшихся?

10 класс

Первый день

10.1. В каждой клетке таблицы, состоящей из 10 столбцов и n строк, записана цифра. Известно, что для любой строки A и любых двух столбцов найдётся строка, отличающаяся от A ровно в этих двух столбцах. Докажите, что $n \geqslant 512$.

10.2. На доске написаны девять приведённых квадратных трёхчленов: $x^2+a_1x+b_1$, $x^2+a_2x+b_2$, $\ldots$, $x^2+a_9x+b_9$. Известно, что последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_9$ и $b_1, b_2, \ldots, b_9$ — арифметические прогрессии. Оказалось, что сумма всех девяти трёхчленов имеет хотя бы один корень. Какое наибольшее количество исходных трёхчленов может не иметь корней?

10.3. Назовём компанию k-*неразбиваемой*, если при любом разбиении её на k групп в одной из групп найдутся два знакомых человека. Дана 3-неразбиваемая компания, в которой нет четырёх попарно знакомых человек. Докажите, что её можно разделить на две компании, одна из которых 2-неразбиваемая, а другая — 1-неразбиваемая.

10.4. Периметр треугольника ABC равен 4. На лучах AB и AC отмечены точки X и Y так, что $AX = AY = 1$. Отрезки BC и XY пересекаются в точке M. Докажите, что периметр одного из треугольников ABM и ACM равен 2.

XXXVII Всероссийская математическая олимпиада школьников

10 класс

Первый день

10.1. В каждой клетке таблицы, состоящей из 10 столбцов и n строк, записана цифра. Известно, что для любой строки A и любых двух столбцов найдётся строка, отличающаяся от A ровно в этих двух столбцах. Докажите, что $n \geqslant 512$.

10.2. На доске написаны девять приведённых квадратных трёхчленов: $x^2+a_1x+b_1$, $x^2+a_2x+b_2$, $\ldots$, $x^2+a_9x+b_9$. Известно, что последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_9$ и $b_1, b_2, \ldots, b_9$ — арифметические прогрессии. Оказалось, что сумма всех девяти трёхчленов имеет хотя бы один корень. Какое наибольшее количество исходных трёхчленов может не иметь корней?

10.3. Назовём компанию k-*неразбиваемой*, если при любом разбиении её на k групп в одной из групп найдутся два знакомых человека. Дана 3-неразбиваемая компания, в которой нет четырёх попарно знакомых человек. Докажите, что её можно разделить на две компании, одна из которых 2-неразбиваемая, а другая — 1-неразбиваемая.

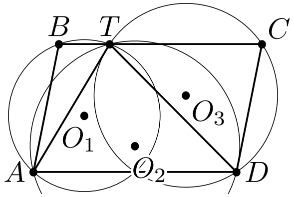
10.4. Периметр треугольника ABC равен 4. На лучах AB и AC отмечены точки X и Y так, что $AX = AY = 1$. Отрезки BC и XY пересекаются в точке M. Докажите, что периметр одного из треугольников ABM и ACM равен 2.

11 класс

Первый день

11.1. Натуральные числа d и d', $d' > d$ —- делители натурального числа n. Докажите, что $d' > d + \frac{d^2}{n}$.

11.2. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ ($\angle A < 90^\circ$) отмечена точка T так, что треугольник ATD — остроугольный. Пусть O_1, O_2 и O_3 — центры описанных окружностей треугольников ABT, DAT и CDT соответственно (см. рисунок). Докажите, что точка пересечения высот треугольника $O_1O_2O_3$ лежит на прямой AD.



11.3. В Академии Наук 999 академиков. Каждая научная тема интересует ровно троих академиков, и у каждых двух академиков есть ровно одна тема, интересная им обоим. Докажите, что можно выбрать 250 тем из их общей области научных интересов так, чтобы каждый академик интересовался не более, чем одной из них.

11.4. По шоссе в одном направлении едут 10 автомобилей. Шоссе проходит через несколько населённых пунктов. Каждый из автомобилей едет с некоторой постоянной скоростью в населённых пунктах и с некоторой другой постоянной скоростью вне населённых пунктов. Для разных автомобилей эти скорости могут отличаться. Вдоль шоссе расположено 2011 флажков. Известно, что каждый автомобиль проехал мимо каждого флажка, причём около флажков обгонов не происходило. Докажите, что мимо каких-то двух флажков автомобили проехали в одном и том же порядке.

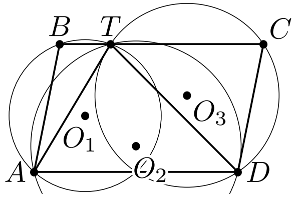
XXXVII Всероссийская математическая олимпиада школьников

11 класс

Первый день

11.1. Натуральные числа d и d', $d' > d$ —- делители натурального числа n. Докажите, что $d' > d + \frac{d^2}{n}$.

11.2. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ ($\angle A < 90^\circ$) отмечена точка T так, что треугольник ATD — остроугольный. Пусть O_1, O_2 и O_3 — центры описанных окружностей треугольников ABT, DAT и CDT соответственно (см. рисунок). Докажите, что точка пересечения высот треугольника $O_1O_2O_3$ лежит на прямой AD.



11.3. В Академии Наук 999 академиков. Каждая научная тема интересует ровно троих академиков, и у каждых двух академиков есть ровно одна тема, интересная им обоим. Докажите, что можно выбрать 250 тем из их общей области научных интересов так, чтобы каждый академик интересовался не более, чем одной из них.

11.4. По шоссе в одном направлении едут 10 автомобилей. Шоссе проходит через несколько населённых пунктов. Каждый из автомобилей едет с некоторой постоянной скоростью в населённых пунктах и с некоторой другой постоянной скоростью вне населённых пунктов. Для разных автомобилей эти скорости могут отличаться. Вдоль шоссе расположено 2011 флажков. Известно, что каждый автомобиль проехал мимо каждого флажка, причём около флажков обгонов не происходило. Докажите, что мимо каких-то двух флажков автомобили проехали в одном и том же порядке.