Материалы для проведения регионального этапа

XXXVII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2010–2011 учебный год

Первый день

25–26 января 2011 г.

Москва, 2010

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XXXVII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической Комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н.Х. Агаханов, А.Я. Белов-Канель, В.В. Астахов, С.Л. Берлов, И.И. Богданов, А.А. Гаврилюк, О.Ю. Дмитриев, Л.А. Емельянов, Р.Г. Женодаров, П.А. Кожевников, М.А. Козачок, П.Ю. Козлов, А.Н. Магазинов, П.В. Мартынов, В.Б. Мокин, В.А. Омельяненко, О.К. Подлипский, И.С. Рубанов, В.А. Сендеров, Д.А. Терёшин, Б.В. Трушин, Д.Г. Храмцов, К.В. Чувилин, В.А. Шмаров.

В скобках после каждой задачи указана фамилия ее автора.

Компьютерный макет: К.В. Чувилин, И.И. Богданов.

Методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2010–2011 учебного года.

Олимпиада проводится в два дня (тура) — 25 и 26 января 2011 года. Задания каждого тура содержат по 4 задачи для каждой возрастной группы. Каждый тур олимпиады длится 4 часа.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 56 (28 — I тур, 28 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части — решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Ниже приведены ответы и решения задач олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.1. Про три положительных числа известно, что если выбрать одно из них и прибавить к нему сумму квадратов двух других, то получится одна и та же сумма, независимо от выбранного числа. Верно ли, что все числа равны? (*Л. Емельянов*)

Ответ. Нет, неверно.

Решение. Подойдёт, например, тройка 1/3, 1/3, 2/3.

Замечание. Все такие тройки можно получить, решив соответствующую систему: $a + b^2 + c^2 = a^2 + b + c^2 = a^2 + b^2 + c$. Из первых двух равенств имеем $a^2 - a = b^2 - b$; перенося всё в левую часть, получаем $(a - b)(a + b - 1) = 0$. Значит, $a = b$ или $b = 1 - a$; аналогичные утверждения верны для остальных пар чисел. Итого, кроме троек из равных чисел, подходят все тройки вида $a, a, 1 - a$ и только они.

9.2. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$). На меньшей дуге AB описанной около него окружности взята точка D. На продолжении отрезка AD за точку D выбрана точка E так, что точки A и E лежат в одной полуплоскости относительно BC. Описанная окружность треугольника BDE пересекает сторону AB в точке F. Докажите, что прямые EF и BC параллельны. (*Р. Женодаров*)

Решение. Обозначим через Ω и ω описанные окружности треугольников ABC и BDE. Положим $\angle ACB = \angle ABC = \alpha$. Четырёхугольник $BDAC$ вписан в Ω, значит, $\angle ADB = 180^\circ - \angle ACB = 180^\circ - \alpha$. Углы ADB и EDB — смежные, откуда $\angle EDB = 180^\circ - \angle ADB = \alpha$.

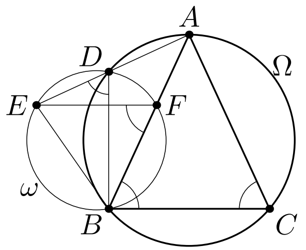

Рис. 1

Далее, поскольку четырёхугольник $EDFB$ вписан в ω, имеем $\angle EFB = \angle EDB = \alpha$.

Итого, $\angle EFB = \angle FBC = \alpha$, а значит, прямые EF и BC параллельны.

9.3. Через центры некоторых клеток шахматной доски 8×8 проведена замкнутая несамопересекающаяся ломаная. Каждое звено ломаной соединяет центры соседних по горизонтали, вертикали или диагонали клеток. Докажите, что в ограниченном ею многоугольнике общая площадь чёрных частей равна общей площади белых частей. (*Д. Храмцов*)

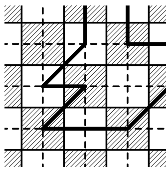

Рис. 2

Решение. Проведём пунктиром вертикальные и горизонтальные линии через центры клеток доски. На получившейся пунктирной сетке каждое звено нашей ломаной соединяет узлы, соседние по вертикали, горизонтали или диагонали. Поэтому пунктирные прямые разбивают область, ограниченную ломаной, на единичные квадратики и половинки квадратиков, получаемые разрезанием их по диагонали.

Осталось заметить, что в каждом таком квадратике и в каждом таком треугольнике площади чёрной и белой частей равны. Действительно, каждый квадратик содержит по две четверти клеток обоих цветов, а треугольник — четверть клетки одного цвета и два треугольничка, каждый из которых составляет восьмую часть клетки другого цвета.

Комментарий. Рассмотрение некоторых конкретных ломаных без описания общей идеи решения — 0 баллов.

9.4. Даны положительные числа x, y, z. Докажите неравенство

$$\frac{x+1}{y+1} + \frac{y+1}{z+1} + \frac{z+1}{x+1} \leqslant \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\,.$$

(*А. Храбров, Б. Трушин*)

Решение. Заметим, что $\dfrac{a+1}{b+1} - \dfrac{a}{b} = \dfrac{b-a}{b(b+1)}$ для любых положительных a и b. Значит, после переноса всех членов в левую часть требуемое неравенство приобретает вид

$$\frac{y-x}{y(y+1)} + \frac{z-y}{z(z+1)} + \frac{x-z}{x(x+1)} \leqslant 0. \qquad (1)$$

Можно считать, что x — наибольшее из трёх данных чисел. Возможны два случая.

Случай 1. $y \geqslant z$. В этом случае имеем
$$\frac{x-y}{x(x+1)} \leqslant \frac{x-y}{y(y+1)}, \quad \frac{y-z}{x(x+1)} \leqslant \frac{y-z}{z(z+1)}.$$
Складывая эти неравенства, получаем
$$\frac{x-z}{x(x+1)} \leqslant -\frac{y-x}{y(y+1)} - \frac{z-y}{z(z+1)},$$
что равносильно (1).

Случай 2. $y < z$. Тогда имеем
$$\frac{z-y}{z(z+1)} \leqslant \frac{z-y}{y(y+1)}, \quad \frac{x-z}{x(x+1)} \leqslant \frac{x-z}{y(y+1)}.$$
Складывая эти неравенства, получаем
$$\frac{z-y}{z(z+1)} + \frac{x-z}{x(x+1)} \leqslant -\frac{y-x}{y(y+1)},$$
что опять же равносильно (1).

Комментарий. Существуют два различных варианта упорядочения переменных, с точностью до циклической перестановки (в авторском решении это варианты $x \geqslant y \geqslant z$ и $x \geqslant z \geqslant y$). Правильное рассмотрение только одного из таких случаев — ставить 3 балла.

10 класс

10.1. Два бегуна стартовали одновременно из одной точки. Сначала они бежали по улице до стадиона, а потом до финиша — три круга по стадиону. Всю дистанцию оба бежали с постоянными скоростями, и в ходе забега первый бегун дважды обогнал второго. Докажите, что первый бежал по крайней мере вдвое быстрее, чем второй. (*И. Рубанов*)

Решение. Первый мог обогнать второго только на кольцевой дорожке стадиона. Так как он вбежал на стадион первым, на своём первом круге он обогнать второго не мог. Стало быть, обгоны случились, когда первый бежал по стадиону свои второй и третий круги. Пока первый бежал эти два круга, он обогнал второго по крайней мере на круг. Следовательно, второй за это время пробежал не больше одного круга, откуда и вытекает требуемое утверждение.

Комментарий. Если в решении рассмотрен лишь некоторый частный случай (например, без обоснования говорится, что достаточно рассмотреть лишь случай, когда первая встреча происходит в тот момент, когда второй бегун вбегает на стадион, или без обоснования утверждается, что «наихудший случай — если вторая встреча произошла на финише») — ставится не более 3 баллов за всю задачу.

10.2. На стороне AC остроугольного треугольника ABC выбраны точки M и K так, что $\angle ABM = \angle CBK$. Докажите, что центры окружностей, описанных около треугольников ABM, ABK, CBM и CBK, лежат на одной окружности. (*Т. Емельянова*)

Решение. Без ограничения общности можно считать, что точка M лежит между A и K. Пусть O_1, O_2, O_3 и O_4 — центры описанных окружностей треугольников ABM, ABK, CBM и CBK соответственно. Прямые O_1O_3 и O_1O_2 являются серединными перпендикулярами к отрезкам BM и AB, соответственно. Значит, углы $O_2O_1O_3$ и ABM равны как углы с взаимно перпендикулярными сторонами (см. рис. 3). Аналогично, $\angle O_2O_4O_3 = \angle CBK$, а значит, $\angle O_2O_4O_3 = \angle O_2O_1O_3$. Это и означает, что точки O_1, O_2, O_3, O_4 лежат на одной окружности.

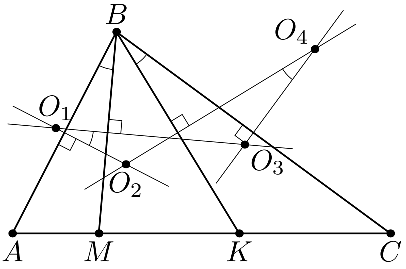

Рис. 3

Замечание. Нетрудно видеть, что точка пересечения прямых O_1O_2 и O_3O_4 — центр O описанной окружности треугольника ABC, причём точки O_2 и O_3 лежат на отрезках OO_1 и OO_4, соответственно. Это позволяет обосновать расположение точек на рисунке.

Комментарий. За отсутствие обоснования расположения точек баллы не снимаются.

10.3. Даны различные натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{14}$. На доску выписаны все 196 чисел вида $a_k + a_\ell$, где $1 \leqslant k, \ell \leqslant 14$. Может ли оказаться, что для любой комбинации из двух цифр среди написанных на доске чисел найдется хотя бы одно число, оканчивающееся на эту комбинацию (то есть, найдутся числа, оканчивающиеся на 00, 01, 02, ..., 99)? (*П. Кожевников*)

Ответ. Не может.

Решение. Пусть среди наших 14 чисел есть a чётных и $b = 14 - a$ нечётных. Нечётное число на доске может появиться лишь как сумма чётного и нечётного, т.е. таких чисел будет ab (при этом каждое будет выписано по два раза). Но $ab = \dfrac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4} \leqslant \dfrac{(a+b)^2}{4} = 49$. Значит, на доске будет не более 49 различных нечётных чисел; а, чтобы выполнялось условие, их должно быть хотя бы 50. Значит, требуемое невозможно.

Комментарий. Доказано только, что на доску выписаны не более 105 различных чисел — 0 баллов.

10.4. Ненулевые числа a, b, c таковы, что любые два из трёх уравнений $ax^{11} + bx^4 + c = 0$, $bx^{11} + cx^4 + a = 0$, $cx^{11} + ax^4 + b = 0$ имеют общий корень. Докажите, что все три уравнения имеют общий корень. (*И. Богданов*)

Решение. Заметим сразу, что все корни наших уравнений — ненулевые, поскольку свободные члены не равны нулю.

Пусть p — общий корень первых двух уравнений. Тогда имеем

$$0 = b(ap^{11} + bp^4 + c) - a(bp^{11} + cp^4 + a) = p^4(b^2 - ac) - (a^2 - bc),$$
$$0 = b(bp^{11} + cp^4 + a) - c(ap^{11} + bp^4 + c) = p^{11}(b^2 - ac) - (c^2 - ab).$$

Отсюда следует, что если одно из чисел $a^2 - bc$, $b^2 - ac$, $c^2 - ab$ равно нулю, то и все три равны нулю. Но тогда $a/b = b/c = c/a$, а поскольку произведение этих чисел равно 1, то и все они равны 1, то есть $a = b = c$. В этом случае утверждение задачи очевидно.

В противном случае все три числа $|a^2 - bc|$, $|b^2 - ac|$, $|c^2 - ab|$ ненулевые. Переименовав, если надо, переменые по циклу, можно считать, что $|b^2 - ac|$ — среднее по величине из них. Тогда из полученных выше равенств следует, что одно из чисел $|p|^4 = \dfrac{|a^2 - bc|}{|b^2 - ac|}$ и $|p|^{11} = \dfrac{|c^2 - ab|}{|b^2 - ac|}$ не больше единицы, а другое — не меньше единицы. Это возможно лишь тогда, когда оба они равны единице, то есть $|p| = 1$, $|a^2 - bc| = |b^2 - ac| = |c^2 - ab|$. Обозначая через q и r общие корни в других парах, получаем теперь из аналогичных равенств $|q| = |r| = |p| = 1$, и два из чисел p, q, r равны, скажем, $p = q$. Но тогда это число является общим корнем всех трёх уравнений.

Комментарий. Получено выражение общего корня p двух уравнений (или его степени) через a, b, c — 1 балл.

Получены два *существенно* различных выражения степеней p через a, b, c (как, например, выражения $p^4 = \dfrac{a^2 - bc}{b^2 - ac}$ и $p^{11} = \dfrac{c^2 - ab}{b^2 - ac}$ в авторском решении) — 2 балла.

Если вдобавок к предыдущему продвижению разобран случай обращения в 0 одного из выражений $b^2 - ac$, $c^2 - ab$, $a^2 - bc$ — добавить ещё 1 балл.

11 класс

11.1. Существует ли такое вещественное α, что число $\cos\alpha$ иррационально, а все числа $\cos 2\alpha, \cos 3\alpha, \cos 4\alpha, \cos 5\alpha$ рациональны?

(*В. Сендеров*)

Ответ. Не существует.

Решение. Предположим противное. Тогда число $A = \cos\alpha + \cos 5\alpha$ иррационально как сумма рационального и иррационального; с другой стороны, $A = 2\cos 2\alpha \cos 3\alpha$ рационально как произведение трёх рациональных чисел. Противоречие.

Замечание. Если убрать из условия $\cos 5\alpha$, то ответ будет другим. Например, при $\alpha = \pi/6$ число $\cos\alpha$ иррационально, а числа $\cos 2\alpha, \cos 3\alpha, \cos 4\alpha$ рациональны.

С другой стороны, из решения видно, что $\cos 4\alpha$ можно удалить из условия безболезненно.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

11.2. Даны 2011 ненулевых целых чисел. Известно, что сумма любого из них с произведением оставшихся 2010 чисел отрицательна. Докажите, что если произвольным образом разбить все данные числа на две группы и перемножить числа в группах, то сумма двух полученных произведений также будет отрицательной.

(*Н. Агаханов, И. Богданов*)

Решение. Предположим, что среди данных чисел четное количество отрицательных. Тогда среди них есть положительное число a, и произведение всех чисел, кроме a, положительно. Это противоречит условию.

Значит, среди данных чисел нечетное число отрицательных. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_k$ и $y_1, y_2, \ldots, y_m$ — две группы, на которые разбиты данные числа ($k + m = 2011$). Ровно одно из двух произведений $x_1x_2\ldots x_k$ и $y_1y_2\ldots y_m$ (а именно то, в котором нечётное число отрицательных сомножителей) — отрицательно; пусть для определенности $x_1x_2\ldots x_k < 0$, $y_1y_2\ldots y_m > 0$. Тогда среди чисел $x_1, x_2, \ldots, x_k$ найдется отрицательное, скажем, $x_1 < 0$. Отсюда $x_2\ldots x_k > 0$, а значит, $x_2\ldots x_k \geqslant 1$ (так как данные числа целые). Следовательно, $x_1x_2\ldots x_k + y_1y_2\ldots y_m \leqslant$

$\leqslant x_1 + y_1y_2 \ldots y_m \leqslant x_1 + y_1y_2 \ldots y_m x_2 \ldots x_k$. Но по условию $x_1 + y_1y_2 \ldots y_m x_2 \ldots x_k < 0$.

Замечание. Можно показать, что условие задачи выполняется тогда и только тогда, когда среди данных чисел ровно одно отрицательное, и его модуль больше произведения всех остальных.

Комментарий. Доказано, что среди данных чисел нечетное число отрицательных — 2 балла.

11.3. На окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$, выбрана точка K. Оказалось, что прямая CK пересекает отрезок AD в точке M такой, что $AM : MD = 2$. Пусть O — центр прямоугольника. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника OKD лежит на окружности, описанной около треугольника COD. *(В. Шмаров)*

Решение. Отметим на продолжении отрезка AD такую точку T, что $AT = DM$. Тогда прямоугольные треугольники CDM и BAT равны, а значит, $BT \parallel CM$. Заметим, что $DT = DA + AT = 3DM + DM = 4DM$. По теореме Фалеса, прямая CM пересекает отрезок BD в точке N такой, что $DB = 4DN$. Значит, $DN = NO$, то есть KN — медиана треугольника OKD.

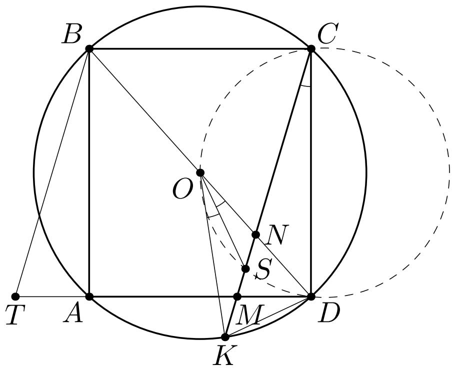

Рис. 4

Пусть S — точка пересечения медиан треугольника OKD. Поскольку $OD = OK$, точка S лежит на биссектрисе угла KOD, и $\angle SOD = \frac{1}{2}\angle KOD$. С другой стороны, вписанный угол KCD равен половине центрального угла KOD, откуда $\angle SOD = \frac{1}{2}\angle KOD = \angle SCD$. Это и означает, что точки S, D, O, C лежат на одной окружности.

Комментарий. Доказано, что прямая KC делит отрезок OD пополам — 2 балла.

11.4. 2011 складов соединены дорогами так, что от любого склада можно проехать к любому другому, возможно, проехав по нескольким дорогам. На складах находится по $x_1, \ldots, x_{2011}$ кг цемента соответственно. За один рейс можно провезти с произвольного склада на другой склад по соединяющей их дороге произвольное количество цемента. В итоге на складах по плану должно оказаться по $y_1, \ldots, y_{2011}$ кг цемента соответственно, причём

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{2011} = y_1 + y_2 + \ldots + y_{2011}.$$

За какое минимальное количество рейсов можно выполнить план при любых значениях чисел x_i и y_i и любой схеме дорог?

(*Р. Карасёв*)

Ответ. За 2010 рейсов.

Решение. Покажем вначале, что за 2009 рейсов план выполнить удастся не всегда. Пусть (при произвольной схеме дорог) изначально весь цемент расположен на одном складе S, а распределить его нужно по всем складам поровну. Тогда на каждый склад, кроме S, нужно в каком-нибудь рейсе цемент завезти; ясно, что такие 2010 рейсов различны, поэтому всего рейсов должно быть не меньше 2010.

Нам осталось показать, что за 2010 рейсов план всегда удастся выполнить. Мы докажем индукцией по n, что при n складах всегда удастся обойтись $n-1$ рейсом. База при $n=1$ очевидна.

Пусть $n > 1$. Так как с любого склада можно добраться до любого другого, то существует маршрут, проходящий по всем складам (может быть, неоднократно). Рассмотрим любой такой маршрут и склад A, который впервые появился на этом маршруте позже всего. Тогда, если удалить склад A и все дороги, ведущие из него, то по-прежнему от любого склада до любого другого можно добраться (по предыдущим дорогам маршрута).

Можно считать, что A — склад с номером n. Если $y_n \leqslant x_n$, то вывезем из A на любой соединённый с ним склад $x_n - y_n$ кг цемента, а после этого забудем про него и про все дороги, из него ведущие. По предположению индукции, для оставшихся складов можно выполнить план за $(n-1)-1$ рейс. В итоге через $(n-2)+1$ рейс получится требуемое распределение цемента.

Если же $y_n > x_n$, то мы уже доказали, что из распределения, когда на i-м складе находится y_i кг, можно получить распределение, когда на i-м складе находится x_i кг, за $n-1$ рейс. Проведя теперь все эти перевозки в обратном порядке (и обратном направлении), мы осуществим требуемый план.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Только предъявлен пример, показывающий, что за 2009 рейсов план выполним не всегда — 2 балла.

Доказано только, что 2010 рейсов хватит всегда — 5 баллов.