Материалы для проведения регионального этапа

XXXVII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2010–2011 учебный год

Второй день

25–26 января 2011 г.

Москва, 2010

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XXXVII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической Комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н.Х. Агаханов, А.Я. Белов-Канель, В.В. Астахов, С.Л. Берлов, И.И. Богданов, А.А. Гаврилюк, О.Ю. Дмитриев, Л.А. Емельянов, Р.Г. Женодаров, П.А. Кожевников, М.А. Козачок, П.Ю. Козлов, А.Н. Магазинов, П.В. Мартынов, В.Б. Мокин, В.А. Омельяненко, О.К. Подлипский, И.С. Рубанов, В.А. Сендеров, Д.А. Терёшин, Б.В. Трушин, Д.Г. Храмцов, К.В. Чувилин, В.А. Шмаров.

В скобках после каждой задачи указана фамилия ее автора.

Компьютерный макет: К.В. Чувилин, И.И. Богданов.

Методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2010–2011 учебного года.

Олимпиада проводится в два дня (тура) — 25 и 26 января 2011 года. Задания каждого тура содержат по 4 задачи для каждой возрастной группы. Каждый тур олимпиады длится 4 часа.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 56 (28 — I тур, 28 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части — решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Ниже приведены ответы и решения задач олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.5. Найдите все числа a такие, что для любого натурального n число $an(n+2)(n+4)$ будет целым. (*О. Подлипский*)

Ответ. $a = \frac{k}{3}$, где k — любое целое число.

Решение. Подставив $n = 1$ и $n = 2$, получаем, что числа $15a$ и $48a$ — целые. Значит, и число $48a - 3 \cdot 15a = 3a$ — тоже целое. Таким образом, $a = k/3$ для некоторого целого k.

Осталось показать, что все числа такого вида подходят. Действительно, одно из трёх последовательных чётных (или нечётных) чисел n, $n+2$, $n+4$ делится на 3; значит, $n(n+2)(n+4)$ делится на 3, а поэтому $an(n+2)(n+4) = k\,\frac{n(n+2)(n+4)}{3}$ — целое число.

Комментарий. Доказано, что любое число указанного вида подходит — 2 балла.

Доказано, что число a обязано иметь указанный вид — 4 балла.

Только правильный ответ — 1 балл (этот балл не суммируется с другими).

9.6. Вначале на плоскости были отмечены три различные точки. Каждую минуту выбирались некоторые три из отмеченных точек — обозначим их A, B и C, после чего на плоскости отмечалась точка D, симметричная A относительно серединного перпендикуляра к BC.

Через сутки оказалось, что среди отмеченных точек нашлись три различные точки, лежащие на одной прямой. Докажите, что три исходных точки также лежали на одной прямой. (*В. Шмаров*)

Решение. Предположим противное; тогда исходные три точки лежат на некоторой окружности ω. Докажем индукцией по количеству минут, что все отмеченные точки также лежат на ω. Действительно, изначально это верно. Пусть в некоторый момент по точкам A, B, C строится точка D. Тогда серединный перпендикуляр ℓ к BC проходит через центр ω, значит, эта окружность симметрична относительно ℓ. Так как точка A лежит на ω, то и D также на ней лежит.

Итак, через сутки все отмеченные точки лежат на ω. Но любая прямая пересекает ω не более, чем по двум различным точкам; значит, на ней не найдётся трёх отмеченных точек. Противоречие.

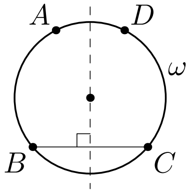

Рис. 1

Комментарий. Указано без доказательства, что все отмеченные точки лежат либо на одной окружности, либо на одной прямой — 2 балла.

9.7. Найдите все тройки простых чисел p, q, r такие, что четвёртая степень любого из них, уменьшенная на 1, делится на произведение двух остальных. (*В. Сендеров*)

Ответ. $2, 3, 5$.

Решение. Ясно, что любые два числа тройки различны (если $p = q$, то $p^4 - 1$ не делится на q). Пусть для определённости p — наименьшее из чисел тройки. Нам известно, что число $p^4 - 1 = (p-1)(p+1)(p^2+1)$ делится на qr. Заметим, что $p - 1$ меньше любого из простых чисел q и r, а значит, взаимно просто с ними. Далее, число $p^2 + 1$ не может делиться на оба числа q и r, так как $p^2 + 1 < (p+1)(p+1) < qr$. Значит, $p + 1$ делится на одно из них (для определённости, на q). Поскольку $q > p$, это возможно лишь при $q = p + 1$. Тогда одно из чисел p и q чётно, а поскольку оно простое, то $p = 2$, $q = 3$. Наконец, r является простым делителем числа $p^4 - 1 = 15$, отличным от $q = 3$, значит, $r = 5$.

Осталось проверить, что тройка $2, 3, 5$ удовлетворяет условиям задачи.

Комментарий. Только правильный ответ — 1 балл.

Идея выбора наименьшего p из трех простых чисел для исследования делимости $p^4 - 1$ на qr оценивается в 1 балл.

При верном решении отсутствует указание на необходимость проверки того, что полученная тройка подходит — снимается 1 балл.

9.8. Прямую палку длиной 2 метра распилили на N палочек, длина каждой из которых выражается целым числом сантиметров. При каком наименьшем N можно гарантировать, что, использовав все получившиеся палочки, можно, не ломая их, сложить контур некоторого прямоугольника? (*А. Магазинов*)

Ответ. $N = 102$.

Решение. Первое решение. Пусть $N \leqslant 101$. Распилим палку на $N - 1$ палочки длиной 1 см и одну палочку длиной $(201 - N)$ см. Из полученного набора невозможно сложить прямоугольник, так как каждая из сторон прямоугольника меньше полупериметра и, следовательно, палочка длиной $201 - N \geqslant 100$ см не может быть частью никакой стороны. Таким образом, $N \geqslant 102$.

Покажем, что при $N = 102$ искомый прямоугольник найдется. Для этого заметим, что среди всех палочек найдутся две длиной по 1 см. В самом деле, если бы это было не так, то суммарная длина палочек была бы не меньше $2 \cdot 101 + 1 = 203$ см, что неверно.

Отложим эти две палочки. Пусть длины оставшихся палочек равны $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ см, тогда имеем $a_1 + a_2 + \ldots + a_{100} = 198$. Среди 100 чисел $A_1 = a_1, A_2 = a_1 + a_2, A_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots, A_{100} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}$ найдутся два, дающие одинаковый остаток от деления на 99. Пусть это A_k и A_ℓ, $k < \ell$. Число $A_\ell - A_k$ строго больше нуля и строго меньше 198, при этом оно делится на 99. Значит, $A_\ell - A_k = 99 = a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_\ell$.

Тем самым, мы нашли несколько палочек суммарной длины 99 см. Отложим и их. Оставшиеся палочки также имеют суммарную длину 99 см. Таким образом, нам удастся сложить прямоугольник 1×99 см.

Второе решение. Предъявим другое доказательство того, что при $N = 102$ сложить прямоугольник удастся.

Обозначим длины палочек набора, выраженные в сантиметрах, через $a_1, a_2, \ldots, a_{102}$. Имеем $a_1 + a_2 + \ldots + a_{102} = 200$. Рассмотрим окружность длины 200 и разобьём её 102 красными точками на дуги длины $a_1, a_2, \ldots, a_{102}$. Эти точки являются некоторыми 102 вершинами правильного 200-угольника T, вписанного в эту окружность. Вершины T разбиваются на пары противоположных. Таких пар 100, а красных точек — 102, значит, среди красных точек найдутся две пары противоположных.

Эти две пары точек делят окружность на две пары равных дуг. Таким образом, мы разбили все палочки на четыре группы A, B, C, D, причём суммарные длины в группах A и C, а также в группах B и D равны. Значит, можно составить прямоугольник, используя каждую группу для составления одной его стороны.

Комментарий. Только верный ответ — 0 баллов.

Приведён пример, показывающий, что $N \geqslant 102$ — 1 балл.

Доказано, что $N = 102$ подходит, но не обоснована его минимальность — 5 баллов.

10 класс

10.5. Найдите все числа a такие, что для любого натурального n число $an(n+2)(n+3)(n+4)$ будет целым. (*О. Подлипский*)

Ответ. $a = \frac{k}{6}$, где k — любое целое число.

Решение. Подставив $n = 1$, $n = 3$ и $n = 4$, получаем, что числа $60a$, $630a$ и $24 \cdot 56a$ — целые. Значит, a — рациональное число, знаменатель q которого в несократимой записи является делителем чисел 60, 630 и $24 \cdot 56$. Следовательно, их наибольший общий делитель также делится на q. Поскольку НОД$(60, 630) = 30$, а $24 \cdot 56$ не делится на 5, то q — делитель числа 6, и $a = k/6$ при некотором целом k.

Осталось показать, что все числа такого вида подходят. Действительно, одно из трёх последовательных чисел $n+2$, $n+3$, $n+4$ делится на 3, а одно из последовательных чисел $n+2$, $n+3$ делится на 2; значит, $n(n+2)(n+3)(n+4)$ делится на 2 и на 3, а значит, и на 6. Поэтому $an(n+2)(n+3)(n+4) = k\,\frac{n(n+2)(n+3)(n+4)}{6}$ — целое число.

Комментарий. Доказано, что любое число указанного вида подходит — 2 балла.

Доказано, что число a обязано иметь указанный вид — 4 балла.

Только правильный ответ — 1 балл (этот балл не суммируется с другими).

10.6. На доску выписаны 2011 чисел. Оказалось, что сумма любых трёх выписанных чисел также является выписанным числом. Какое наименьшее количество нулей может быть среди этих чисел? (*И. Богданов*)

Ответ. 2009.

Решение. Положим $n = 2011$. Упорядочим выписанные числа в неубывающем порядке: $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$. Поскольку число $a_1 + a_2 + a_3$ выписано, то $a_1 + a_2 + a_3 \geqslant a_1$, откуда $a_2 + a_3 \geqslant 0$. Аналогично получаем $a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \leqslant a_n$, откуда $a_{n-2} + a_{n-1} \leqslant 0$. Итак, $0 \geqslant a_{n-2} + a_{n-1} \geqslant a_2 + a_3 \geqslant 0$; значит, $a_2 + a_3 = a_{n-2} + a_{n-3} = 0$. Так как $a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_{n-2} \leqslant a_{n-1}$, отсюда вытекает, что $a_2 = a_3 = a_{n-2} = a_{n-1}$, а значит, $a_2 = a_3 = \ldots = a_{n-1} = 0$. Итак, среди выписанных чисел хотя бы 2009 нулей.

Пример из 2009 нулей и чисел 1, -1 показывает, что нулей может быть ровно 2009.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Приведён пример, показывающий, что нулей может быть ровно 2009 — 1 балл.

Доказано только, что нулей должно быть не меньше 2009 — 5 баллов.

Показано только, что $a_2 + a_3 \geqslant 0$ (или $a_{n-1} + a_{n-2} \leqslant 0$) — 1 балл.

Показано только, что среди выписанных чисел не более двух положительных и/или не более двух отрицательных — 3 балла.

10.7. В неравнобедренном остроугольном треугольнике ABC точки C_0 и B_0 — середины сторон AB и AC соответственно, O — центр описанной окружности, H — точка пересечения высот. Прямые BH и OC_0 пересекаются в точке P, а прямые CH и OB_0 — в точке Q. Оказалось, что четырехугольник $OPHQ$ — ромб. Докажите, что точки A, P и Q лежат на одной прямой.

(*Л. Емельянов*)

Решение. Положим $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $\alpha = \angle BAC$; тогда $AB' = c\cos\alpha$, $AC' = b\cos\alpha$. Пусть BB' и CC' — высоты треугольника. Так как OB_0 и OC_0 — серединные перпендикуляры к сторонам AC и AB, то отрезки $B'B_0$ и $C'C_0$ равны высотам ромба $OPHQ$, значит, $B'B_0 = C'C_0$, откуда $|AB_0 - AB'| = |AC_0 - AC'|$, или

$$\left|\frac{b}{2} - c\cos\alpha\right| = \left|\frac{c}{2} - b\cos\alpha\right|. \qquad (*)$$

В случае, если в левой и правой частях модули раскрываются с одним знаком, имеем $\frac{b}{2} - c\cos\alpha = \frac{c}{2} - b\cos\alpha$, т.е. $b\left(\frac{1}{2} + \cos\alpha\right) = c\left(\frac{1}{2} + \cos\alpha\right)$. По условию $\alpha < 90^\circ$, поэтому $\cos\alpha > 0$ и, значит, $b = c$, что противоречит условию.

Предположим теперь, что модули в равенстве $(*)$ раскрываются с разными знаками, скажем, $\frac{b}{2} - c\cos\alpha > 0$ и $\frac{c}{2} - b\cos\alpha < 0$

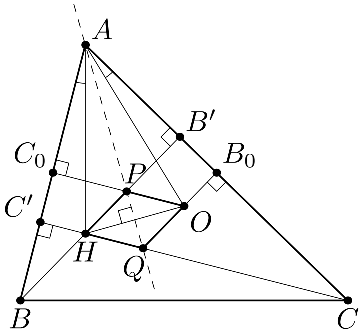

Рис. 2

(геометрически это означает, что точка B' лежит между A и B_0, а точка C_0 — между A и C', см. рис. 2). Тогда $\frac{b}{2} - c\cos\alpha = b\cos\alpha - \frac{c}{2}$, или $\frac{b+c}{2} = (b+c)\cos\alpha$, откуда $\cos\alpha = \frac{1}{2}$. Таким образом, $\alpha = 60^\circ$.

Тогда $AC' = b\cos\alpha = \frac{b}{2} = AB_0$, значит, точки B_0 и C' симметричны относительно биссектрисы угла BAC. Тогда прямые OB_0 и CC' также симметричны, и их точка пересечения Q лежит на биссектрисе угла BAC. Аналогично, точка P лежит на биссектрисе угла BAC.

Замечание. Для всевозможных неравнобедренных треугольников параллелограмм $OPHQ$ является ромбом только при $\angle BAC = 60^\circ$ или $\angle BAC = 120^\circ$. В последнем случае точки A, P и Q также лежат на одной прямой.

Комментарий. Показано только, что в любом треугольнике $OPHQ$ — параллелограмм — 0 баллов.

Доказано, что $B'B_0 = C'C_0$ — 1 балл.

Не рассмотрена возможность раскрытия модулей с разными знаками (в геометрических терминах — не рассмотрен случай, когда одна из точек B', C' лежит внутри, а другая — вне отрезка от A до середины соответствующей стороны) — ставится не более 1 балла за всю задачу.

Из условия выведено, что $\angle BAC = 60^\circ$ — 4 балла.

10.8. Прямую палку длиной 2 метра распилили на N палочек, длина каждой из которых выражается целым числом сантиметров.

При каком наименьшем N можно гарантировать, что, использовав все получившиеся палочки, можно, не ломая их, сложить контур некоторого прямоугольника? (*А. Магазинов*)

Ответ. $N = 102$.

Решение. Первое решение. Пусть $N \leqslant 101$. Распилим палку на $N - 1$ палочки длиной 1 см и одну палочку длиной $201 - N$ см. Из полученного набора невозможно сложить прямоугольник, так как каждая из сторон прямоугольника меньше полупериметра и, следовательно, палочка длиной $201 - N \geqslant \geqslant 100$ см не может быть частью никакой стороны. Таким образом, $N \geqslant 102$.

Покажем, что при $N = 102$ искомый прямоугольник найдется. Для этого заметим, что среди всех палочек найдутся две длиной по 1 см. В самом деле, если бы это было не так, то суммарная длина палочек была бы не меньше $2 \cdot 101 + 1 = 203$ см, что неверно.

Отложим эти две палочки. Пусть длины оставшихся палочек равны $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ см, тогда имеем $a_1 + a_2 + \ldots + a_{100} = = 198$. Среди 100 чисел $A_1 = a_1, A_2 = a_1 + a_2, A_3 = a_1 + a_2 + + a_3, \ldots, A_{100} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}$ найдутся два, дающие одинаковый остаток от деления на 99. Пусть это A_k и A_ℓ, $k < \ell$. Число $A_\ell - A_k$ строго больше нуля и строго меньше 198, при этом оно делится на 99. Значит, $A_\ell - A_k = 99 = a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_\ell$.

Тем самым, мы нашли несколько палочек суммарной длины 99 см. Отложим и их. Оставшиеся палочки также имеют суммарную длину 99 см. Таким образом, нам удастся сложить прямоугольник 1×99 см.

Второе решение. Предъявим другое доказательство того, что при $N = 102$ сложить прямоугольник удастся.

Обозначим длины палочек набора, выраженные в сантиметрах, через $a_1, a_2, \ldots, a_{102}$. Имеем $a_1 + a_2 + \ldots + a_{102} = 200$. Рассмотрим окружность длины 200 и разобьём её 102 красными точками на дуги длины $a_1, a_2, \ldots, a_{102}$. Эти точки являются некоторыми 102 вершинами правильного 200-угольника T, вписанного в эту окружность. Вершины T разбиваются на пары противоположных. Таких пар 100, а красных точек — 102, значит, среди красных точек найдутся две пары противоположных.

Эти две пары точек делят окружность на две пары равных дуг. Таким образом, мы разбили все палочки на четыре группы A, B, C, D, причём суммарные длины в группах A и C, а также в группах B и D равны. Значит, можно составить прямоугольник, используя каждую группу для составления одной его стороны.

Комментарий. Только верный ответ — 0 баллов.

Приведён пример, показывающий, что $N \geqslant 102$ — 1 балл.

Доказано, что $N = 102$ подходит, но не обоснована его минимальность — 5 баллов.

11 класс

11.5. Найдите все числа a такие, что для любого натурального n число $an(n+2)(n+3)(n+4)$ будет целым. (*О. Подлипский*)

Ответ. $a = \frac{k}{6}$, где k — любое целое число.

Решение. Подставив $n = 1$, $n = 3$ и $n = 4$, получаем, что числа $60a$, $630a$ и $24 \cdot 56a$ — целые. Значит, a — рациональное число, знаменатель q которого в несократимой записи является делителем чисел 60, 630 и $24 \cdot 56$. Следовательно, их наибольший общий делитель также делится на q. Поскольку $\text{НОД}(60, 630) = 30$, а $24 \cdot 56$ не делится на 5, то q — делитель числа 6, и $a = k/6$ при некотором целом k.

Осталось показать, что все числа такого вида подходят. Действительно, одно из трёх последовательных чисел $n+2$, $n+3$, $n+4$ делится на 3, а одно из последовательных чисел $n+2$, $n+3$ делится на 2; значит, $n(n+2)(n+3)(n+4)$ делится на 2 и на 3, а значит, и на 6. Поэтому $an(n+2)(n+3)(n+4) = k\,\frac{n(n+2)(n+3)(n+4)}{6}$ — целое число.

Комментарий. Доказано, что любое число указанного вида подходит — 2 балла.

Доказано, что число a обязано иметь указанный вид — 4 балла.

Только правильный ответ — 1 балл (этот балл не суммируется с другими).

11.6. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω. Касательные к ω, проведенные через точки B и C, пересекают касательную к ω, проведенную через точку A, в точках K и L соответственно. Прямая, проведенная через K параллельно AB, пересекается с прямой, проведенной через L параллельно AC, в точке P. Докажите, что $BP = CP$. (*П. Кожевников*)

Решение. Первое решение. Докажем, что точка P лежит на серединном перпендикуляре к отрезку BC. Пусть O — центр окружности ω, а X — точка пересечения прямых BC и PL (см. рис. 3). Так как O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку BC, достаточно доказать, что $OP \perp BC$.

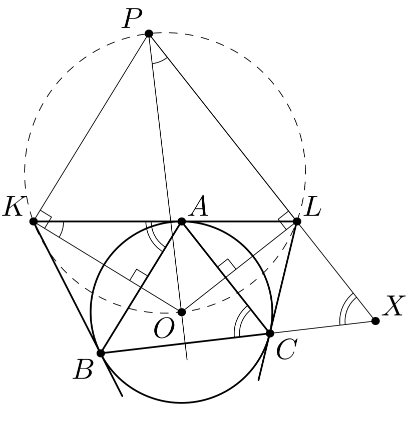

Рис. 3

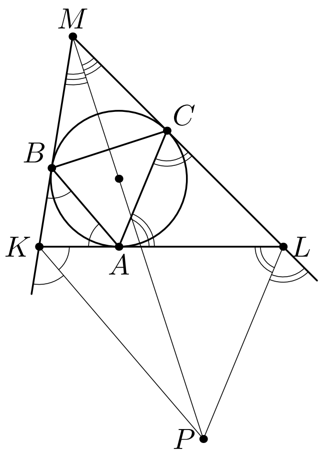

Рис. 4

Точки A и B симметричны относительно прямой OK, поэтому $OK \perp AB \parallel KP$. Аналогично $OL \perp LP$. Поскольку $\angle OKP = \angle OLP = 90^\circ$, четырехугольник $OKPL$ вписанный, откуда $\angle OPL = \angle OKL$. Из касания вытекает, что $\angle KAB = \angle ACB = \angle PXB$. Таким образом, $\angle OPX + \angle PXB = \angle OKL + \angle KAB = 90^\circ$, что и требовалось доказать.

Второе решение. Пусть прямые BK и CL пересекаются в точке M (см. рис. 4). Поскольку треугольник ABK равнобедренный, имеем $\angle PKA = \angle BAK = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AKB)$. Значит, KP — биссектриса внешнего угла при вершине K треугольника KLM. Аналогично, LP — биссектриса внешнего угла при вершине L. Тогда P — центр вневписанной окружности этого треугольника, касающейся стороны KL, поэтому P лежит на биссектрисе угла M. Поскольку $MB = MC$, точки B и C симметричны относительно этой биссектрисы. Значит, и отрезки PB и PC также симметричны и потому равны.

Комментарий. Доказано, что четырехугольник $OKPL$ вписанный — 2 балла.

11.7. Вася нарисовал на плоскости несколько окружностей и провёл всевозможные общие касательные к каждой паре этих окружностей. Оказалось, что проведённые прямые содержат все стороны некоторого правильного 2011-угольника. Какое наименьшее количество окружностей мог нарисовать Вася? (*Н. Агаханов*)

Ответ. 504.

Решение. Обозначим полученный правильный 2011-угольник через M, его вершины (по часовой стрелке) — через X_1, $X_2, \ldots, X_{2011}$, его вписанную окружность через ω, а его центр — через O. Назовём прямые, содержащие стороны многоугольника, *выделенными*.

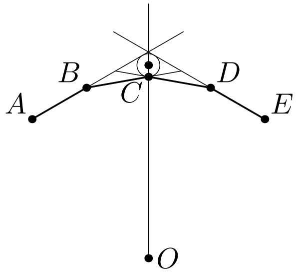

Рис. 5

Заметим, что для любых пяти последовательных вершин A, B, C, D, E многоугольника M существует окружность, отличная от ω, касающаяся прямых AB, BC, CD и DE (см. рис. 5). Действительно, вершины A и E, а также B и D симметричны относительно прямой CO. Тогда точка пересечения внешней биссектрисы угла ABC с прямой CO отлична от O и равноудалена от прямых AB, BC, CD и DE, а значит, является центром искомой окружности. Теперь, если Вася нарисует 503 такие окружности для точек $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$, $(X_5, X_6, X_7, X_8, X_9)$, $\ldots$, $(X_{2009}, X_{2010}, X_{2011}, X_1, X_2)$, а также окружность ω, то любая выделенная прямая будет общей касательной к двум проведённым окружностям. Итак, 504 окружностей достаточно.

Осталось доказать, что окружностей должно быть не менее 504. Каждой выделенной прямой должны касаться хотя бы две окружности. Окружность ω касается всех 2011 этих прямых. У любой другой окружности есть не более четырёх общих касательных с ω; значит, она касается не более четырёх выделенных прямых. Итак, если окружностей n, то всего происходит не более, чем $2011 + 4(n-1)$ касаний окружности с выделенными прямыми; с другой стороны, их должно быть не меньше $2011 \cdot 2 = 4022$. Итак, $2011 + 4(n-1) \geqslant 2 \cdot 2011$, откуда $n \geqslant 2011/4 + 1 > 503$, что и требовалось доказать.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Показано только, что 504 окружностей достаточно — 2 балла.

Показано только, что 503 окружностей недостаточно — 4 балла.

11.8. Даны положительные числа b и c. Докажите неравенство

$$(b-c)^{2011}(b+c)^{2011}(c-b)^{2011} \geqslant \geqslant (b^{2011}-c^{2011})(b^{2011}+c^{2011})(c^{2011}-b^{2011}).$$

(*В. Сендеров*)

Решение. Лемма. *Для любых вещественных $x \geqslant y \geqslant 0$ и натурального n верно неравенство*

$$x^n - y^n \geqslant (x-y)^n.$$

Доказательство. Пусть $x = y + t$, $t \geqslant 0$. Раскрывая $x^n = (y+t)^n$ по биному Ньютона, имеем $x^n = y^n + \ldots + t^n \geqslant y^n + t^n$, или $x^n - y^n \geqslant t^n$. Лемма доказана. □

Без ограничения общности можно считать, что $b \geqslant c$. Обозначим $n = 2011$. Применим лемму к числам b, c, а также к числам b^2, c^2; мы получим

$$b^n - c^n \geqslant (b-c)^n,$$

$$(b^n - c^n)(b^n + c^n) = (b^2)^n - (c^2)^n \geqslant (b^2 - c^2)^n = (b-c)^n(b+c)^n.$$

Перемножив полученные неравенства, получаем неравенство

$$(b^n - c^n)(b^n + c^n)(b^n - c^n) \geqslant (b-c)^n(b+c)^n(b-c)^n.$$

Поскольку $b^n - c^n = -(c^n - b^n)$ и $(b-c)^n = -(c-b)^n$, полученное неравенство равносильно требуемому.