9 класс

Первый день

9.1. Пусть $a_1, \ldots, a_{11}$ — различные натуральные числа, не меньшие 2, сумма которых равна 407. Могло ли оказаться, что сумма остатков от деления некоторого натурального числа n на 22 числа $a_1, a_2, \ldots, a_{11}, 4a_1, 4a_2, \ldots, 4a_{11}$ равна 2012?

9.2. На окружности отмечены 2012 точек, делящих её на равные дуги. Из них выбрали k точек и построили выпуклый k-угольник с вершинами в выбранных точках. При каком наибольшем k могло оказаться, что у этого многоугольника нет параллельных сторон?

9.3. Дан параллелограмм $ABCD$ с тупым углом A. Точка H — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на BC. Продолжение медианы треугольника ABC, проведённой из вершины C, пересекает описанную около него окружность в точке K. Докажите, что точки K, H, C и D лежат на одной окружности.

9.4. Положительные действительные числа $a_1, \ldots, a_n$ и k таковы, что $a_1 + \ldots + a_n = 3k$, $a_1^2 + \ldots + a_n^2 = 3k^2$ и $a_1^3 + \ldots + a_n^3 > 3k^3 + k$. Докажите, что какие-то два из чисел $a_1, \ldots, a_n$ отличаются больше, чем на 1.

XXXVIII Всероссийская математическая олимпиада школьников

9 класс

Первый день

9.1. Пусть $a_1, \ldots, a_{11}$ — различные натуральные числа, не меньшие 2, сумма которых равна 407. Могло ли оказаться, что сумма остатков от деления некоторого натурального числа n на 22 числа $a_1, a_2, \ldots, a_{11}, 4a_1, 4a_2, \ldots, 4a_{11}$ равна 2012?

9.2. На окружности отмечены 2012 точек, делящих её на равные дуги. Из них выбрали k точек и построили выпуклый k-угольник с вершинами в выбранных точках. При каком наибольшем k могло оказаться, что у этого многоугольника нет параллельных сторон?

9.3. Дан параллелограмм $ABCD$ с тупым углом A. Точка H — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на BC. Продолжение медианы треугольника ABC, проведённой из вершины C, пересекает описанную около него окружность в точке K. Докажите, что точки K, H, C и D лежат на одной окружности.

9.4. Положительные действительные числа $a_1, \ldots, a_n$ и k таковы, что $a_1 + \ldots + a_n = 3k$, $a_1^2 + \ldots + a_n^2 = 3k^2$ и $a_1^3 + \ldots + a_n^3 > 3k^3 + k$. Докажите, что какие-то два из чисел $a_1, \ldots, a_n$ отличаются больше, чем на 1.

10 класс

Первый день

10.1. Пусть $a_1, \ldots, a_{10}$ — различные натуральные числа, не меньшие 3, сумма которых равна 678. Могло ли оказаться, что сумма остатков от деления некоторого натурального числа n на 20 чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{10}, 2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_{10}$ равна 2012?

10.2. Окружность ω, вписанная в остроугольный неравнобедренный треугольник ABC, касается стороны BC в точке D. Пусть точка I — центр окружности ω, а O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Окружность, описанная около треугольника AID, пересекает вторично прямую AO в точке E. Докажите, что длина отрезка AE равна радиусу окружности ω.

10.3. Любые два из действительных чисел a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 отличаются не менее, чем на 1. Оказалось, что для некоторого действительного k выполнены равенства

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=2k \quad \text{и} \quad a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2=2k^2.$$

Докажите, что $k^2 \geqslant 25/3$.

10.4. Изначально на доске были написаны $n+1$ одночленов 1, x, x^2, $\ldots$, x^n. Договорившись заранее, k мальчиков каждую минуту одновременно вычисляли каждый сумму каких-то двух многочленов, написанных на доске, и результат дописывали на доску. Через m минут на доске были написаны, среди прочих, многочлены $S_1 = 1+x$, $S_2 = 1+x+x^2$, $S_3 = 1+x+x^2+x^3$, $\ldots$, $S_n = 1+x+x^2+\ldots+x^n$. Докажите, что $m \geqslant 2n/(k+1)$.

XXXVIII Всероссийская математическая олимпиада школьников

10 класс

Первый день

10.1. Пусть $a_1, \ldots, a_{10}$ — различные натуральные числа, не меньшие 3, сумма которых равна 678. Могло ли оказаться, что сумма остатков от деления некоторого натурального числа n на 20 чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{10}, 2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_{10}$ равна 2012?

10.2. Окружность ω, вписанная в остроугольный неравнобедренный треугольник ABC, касается стороны BC в точке D. Пусть точка I — центр окружности ω, а O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Окружность, описанная около треугольника AID, пересекает вторично прямую AO в точке E. Докажите, что длина отрезка AE равна радиусу окружности ω.

10.3. Любые два из действительных чисел a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 отличаются не менее, чем на 1. Оказалось, что для некоторого действительного k выполнены равенства

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=2k \quad \text{и} \quad a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2=2k^2.$$

Докажите, что $k^2 \geqslant 25/3$.

10.4. Изначально на доске были написаны $n+1$ одночленов 1, x, x^2, $\ldots$, x^n. Договорившись заранее, k мальчиков каждую минуту одновременно вычисляли каждый сумму каких-то двух многочленов, написанных на доске, и результат дописывали на доску. Через m минут на доске были написаны, среди прочих, многочлены $S_1 = 1+x$, $S_2 = 1+x+x^2$, $S_3 = 1+x+x^2+x^3$, $\ldots$, $S_n = 1+x+x^2+\ldots+x^n$. Докажите, что $m \geqslant 2n/(k+1)$.

11 класс

Первый день

11.1. Изначально на столе лежат 111 кусков пластилина одинаковой массы. За одну операцию можно выбрать несколько групп по одинаковому количеству кусков и в каждой группе весь пластилин слепить в один кусок. За какое наименьшее количество операций можно получить ровно 11 кусков, любые два из которых имеют различные массы?

11.2. Любые два из действительных чисел a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 отличаются не менее, чем на 1. Оказалось, что для некоторого действительного k выполнены равенства

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2k \quad \text{и} \quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = 2k^2.$$

Докажите, что $k^2 \geqslant 25/3$.

11.3. Клетчатая плоскость раскрашена в шахматном порядке в чёрный и белый цвета. Затем белые клетки снова раскрашены в красный и синий цвета так, чтобы клетки, соседние по углу, были разноцветными. Пусть ℓ — прямая, не параллельная сторонам клеток. Для каждого отрезка I, параллельного ℓ, посчитаем разность сумм длин его красных и синих участков. Докажите, что существует число C (зависящее только от прямой ℓ) такое, что все полученные разности не превосходят C.

11.4. Дана пирамида $SA_1A_2 \ldots A_n$, основание которой — выпуклый многоугольник $A_1 \ldots A_n$. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ в плоскости основания построили треугольник $X_iA_iA_{i+1}$, равный треугольнику SA_iA_{i+1} и лежащий по ту же сторону от прямой A_iA_{i+1}, что и основание (мы полагаем $A_{n+1} = A_1$). Докажите, что построенные треугольники покрывают всё основание.

XXXVIII Всероссийская математическая олимпиада школьников

11 класс

Первый день

11.1. Изначально на столе лежат 111 кусков пластилина одинаковой массы. За одну операцию можно выбрать несколько групп по одинаковому количеству кусков и в каждой группе весь пластилин слепить в один кусок. За какое наименьшее количество операций можно получить ровно 11 кусков, любые два из которых имеют различные массы?

11.2. Любые два из действительных чисел a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 отличаются не менее, чем на 1. Оказалось, что для некоторого действительного k выполнены равенства

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2k \quad \text{и} \quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = 2k^2.$$

Докажите, что $k^2 \geqslant 25/3$.

11.3. Клетчатая плоскость раскрашена в шахматном порядке в чёрный и белый цвета. Затем белые клетки снова раскрашены в красный и синий цвета так, чтобы клетки, соседние по углу, были разноцветными. Пусть ℓ — прямая, не параллельная сторонам клеток. Для каждого отрезка I, параллельного ℓ, посчитаем разность сумм длин его красных и синих участков. Докажите, что существует число C (зависящее только от прямой ℓ) такое, что все полученные разности не превосходят C.

11.4. Дана пирамида $SA_1A_2 \ldots A_n$, основание которой — выпуклый многоугольник $A_1 \ldots A_n$. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ в плоскости основания построили треугольник $X_iA_iA_{i+1}$, равный треугольнику SA_iA_{i+1} и лежащий по ту же сторону от прямой A_iA_{i+1}, что и основание (мы полагаем $A_{n+1} = A_1$). Докажите, что построенные треугольники покрывают всё основание.