Материалы для проведения заключительного этапа

XXXVIII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2011–2012 учебный год

Первый день

Смоленск,
23–28 апреля 2012 г.

Москва, 2012

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа XXXVIII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н.Х. Агаханов, А.В. Акопян, А.В. Антропов, В.В. Астахов, С.Л. Берлов, Н.В. Богачёв, И.И. Богданов, С.Г. Волчёнков, А.А. Гаврилюк, А.И. Гарбер, А.С. Голованов, А.Ю. Головко, О.Ю. Дмитриев, В.Л. Дольников, Л.А. Емельянов, Ф.А. Ивлев, Р.Н. Карасёв, П.А. Кожевников, А.Н. Магазинов, П.В. Мартынов, Е.Г. Молчанов, В.А. Омельяненко, А.В. Пастор, О.К. Подлипский, А.А. Полянский, И.А. Решетников, И.С. Рубанов, В.А. Сендеров, А.Б. Скопенков, М.Б. Скопенков, К.А. Сухов, Д.А. Терёшин, Б.В. Трушин, А.И. Храбров, Д.Г. Храмцов, К.В. Чувилин, В.З. Шарич, В.А. Шмаров.

В скобках после каждой задачи указана фамилия ее автора.

Компьютерный макет: И.И. Богданов.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Запрещается публикация или размещение в сети Интернет условий или решений задач олимпиады.

Условия и решения задач

9 класс

9.1. Пусть $a_1, \ldots, a_{11}$ — различные натуральные числа, не меньшие 2, сумма которых равна 407. Могло ли оказаться, что сумма остатков от деления некоторого натурального числа n на 22 числа $a_1, a_2, \ldots, a_{11}, 4a_1, 4a_2, \ldots, 4a_{11}$ равна 2012? (*Н. Агаханов*)

Ответ. Не может.

Решение. Предположим, что такое число n существует.

Заметим, что максимальный возможный остаток от деления на натуральное число m равен $m-1$. Поэтому сумма остатков от деления произвольного числа на числа $a_1, \ldots, a_{11}$ не больше, чем $407-11=396$, а сумма остатков от деления его на числа $4a_1, \ldots, 4a_{11}$ не больше, чем $4\cdot 407-11=1617$. Итак, если бы все остатки были максимальными возможными, то их сумма равнялась бы $396+1617=2013$. Поскольку эта сумма для нашего числа n равна 2012, то все остатки, кроме одного, — максимальные возможные, а один — на единицу меньше максимального возможного.

Значит, при некотором k один из остатков от деления n на числа a_k и $4a_k$ — максимальный возможный, а другой — на единицу меньше максимального возможного. Тогда одно из чисел $n+1$ и $n+2$ делится на a_k, а другое — на $4a_k$, то есть два взаимно простых числа $n+1$ и $n+2$ делятся на $a_k \geqslant 2$. Это невозможно.

9.2. На окружности отмечены 2012 точек, делящих её на равные дуги. Из них выбрали k точек и построили выпуклый k-угольник с вершинами в выбранных точках. При каком наибольшем k могло оказаться, что у этого многоугольника нет параллельных сторон? (*Д. Храмцов*)

Ответ. При $k=1509$.

Решение. Пусть A_1, A_2, $\ldots$, A_{2012} — отмеченные точки в порядке обхода (мы будем считать, что $A_{2013}=A_1$, $A_{2014}=A_2$). Разобьём их на четвёрки точек $(A_1, A_2, A_{1007}, A_{1008})$, $(A_3, A_4, A_{1009}, A_{1010})$, $\ldots$, $(A_{1005}, A_{1006}, A_{2011}, A_{2012})$. Если среди выбранных k точек встретятся все точки некоторой четвёрки $(A_{2i-1}, A_{2i}, A_{2i+1005}, A_{2i+1006})$, то в полученном многоугольнике найдутся две стороны $A_{2i-1}A_{2i}$ и $A_{2i+1005}A_{2i+1006}$, которые симметричны относительно центра окружности и потому параллельны. Это невозможно; значит, в каждой из 503 четвёрок будет отмечено не более трёх вершин, то есть $k \leqslant 503 \cdot 3 = 1509$.

Осталось привести пример 1509-угольника без параллельных сторон с вершинами в отмеченных точках. Подходит, например, многоугольник $A_1A_2 \ldots A_{1006}A_{1008}A_{1010} \ldots A_{2012}$ (его вершинами являются все точки с номерами от 1 до 1006 и все точки с чётными номерами от 2008 до 2012). Действительно, стороны $A_{2012}A_1$, A_1A_2, ..., $A_{1005}A_{1006}$ лежат по одну сторону от диаметра $A_{2012}A_{1006}$ и потому не могут быть параллельными; аналогично, стороны $A_{1006}A_{1008}, \ldots, A_{2010}A_{2012}$ попарно непараллельны. Наконец, маленькая диагональ A_jA_{j+2} правильного 2012-угольника не параллельна его сторонам; значит, никакие две стороны вида A_iA_{i+1} и A_jA_{j+2} также не могут быть параллельными.

9.3. Дан параллелограмм $ABCD$ с тупым углом A. Точка H — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на BC. Продолжение медианы треугольника ABC, проведённой из вершины C, пересекает описанную около него окружность в точке K. Докажите, что точки K, H, C и D лежат на одной окружности.

(*Ф. Ивлев*)

Решение. Пусть E — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на AD. Тогда четырёхугольник $AHBE$ — прямоугольник. Значит, $\angle HED = \angle ABC = 180^\circ - \angle BCD$, то есть точки D, C, H, E лежат на некоторой окружности ω (см. рис. 1).

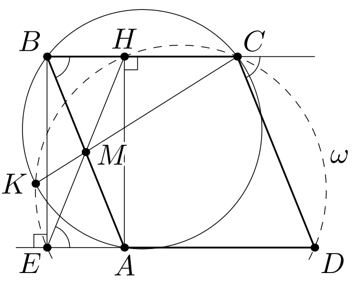

Рис. 1

Пусть M — точка пересечения диагоналей прямоугольника $AHBE$, то есть $MA = MB = MH = ME$ (по условию, точка M лежит на CK). Поскольку точки A, K, B, C лежат на одной окружности, имеем $MK \cdot MC = MA \cdot MB = MH \cdot ME$. Это равенство означает, что точки C, K, H и E лежат на одной окружности. Эта окружность является описанной окружностью треугольника CHE, то есть совпадает с ω; итого, все четыре точки K, H, C, D лежат на ω.

9.4. Положительные действительные числа $a_1, \ldots, a_n$ и k таковы, что $a_1+\ldots+a_n = 3k$, $a_1^2+\ldots+a_n^2 = 3k^2$ и $a_1^3+\ldots+a_n^3 > 3k^3+k$. Докажите, что какие-то два из чисел $a_1, \ldots, a_n$ отличаются больше, чем на 1. (*Н. Агаханов*)

Решение. Перемножив равенство

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 3k \tag{1}$$

и неравенство

$$a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3 > 3k^3 + k,$$

получим неравенство

$$a_1^4+a_2^4+\ldots+a_n^4+a_1^3a_2+a_1a_2^3+a_1^3a_3+a_1a_3^3+\ldots+a_{n-1}^3a_n+a_{n-1}a_n^3 > \\ > 9k^4 + 3k^2. \tag{2}$$

Возведем теперь в квадрат равенство

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = 3k^2. \tag{3}$$

Получим

$$a_1^4 + a_2^4 + \ldots + a_n^4 + 2a_1^2a_2^2 + 2a_1^2a_3^2 + \ldots + 2a_{n-1}^2a_n^2 = 9k^4. \tag{4}$$

Вычитая из неравенства (2) равенство (4), получаем

$$(a_1^3a_2 - 2a_1^2a_2^2 + a_1a_2^3) + \ldots + (a_{n-1}^3a_n - 2a_{n-1}^2a_n^2 + a_{n-1}a_n^3) > 3k^2,$$

или

$$a_1a_2(a_1 - a_2)^2 + a_1a_3(a_1 - a_3)^2 + \ldots + a_{n-1}a_n(a_{n-1} - a_n)^2 > 3k^2. \tag{5}$$

Предположим теперь, что любые два числа отличаются не больше, чем на 1. Тогда квадрат их разности не больше 1, и из (5) получаем неравенство

$$a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n > 3k^2. \tag{6}$$

Но, если вычесть из квадрата равенства (1) равенство (3), получится равенство

$$2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \ldots + 2a_{n-1}a_n = 6k^2,$$

что противоречит (6). Значит, найдутся два числа, отличающиеся больше, чем на 1.

10 класс

10.1. Пусть $a_1, \ldots, a_{10}$ — различные натуральные числа, не меньшие 3, сумма которых равна 678. Могло ли оказаться, что сумма остатков от деления некоторого натурального числа n на 20 чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{10}, 2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_{10}$ равна 2012? (*Н. Агаханов*)

Ответ. Не может.

Решение. Предположим, что такое число n существует.

Заметим, что максимальный возможный остаток от деления на натуральное число m равен $m-1$. Поэтому сумма остатков от деления произвольного числа на числа $a_1, \ldots, a_{10}$ не больше, чем $678 - 10 = 668$, а сумма остатков от деления его на числа $2a_1, \ldots, 2a_{10}$ не больше, чем $2 \cdot 678 - 10 = 1346$. Итак, если бы все остатки были максимальными возможными, то их сумма равнялась бы $668 + 1346 = 2014$. Поскольку эта сумма для нашего числа n равна 2012, возможны только два случая:

Случай 1, когда ровно один из остатков на 2 меньше максимального возможного, а остальные — максимальные возможные, и

Случай 2, когда ровно два остатка на 1 меньше максимальных возможных.

В *случае 1* мы получаем, что при некотором k один из остатков от деления n на числа a_k и $2a_k$ — максимальный возможный, а другой — на 2 меньше максимального возможного. Тогда одно из чисел $n+1$ и $n+3$ делится на a_k, а другое — на $2a_k$, то есть оба делятся на a_k. Это невозможно, так как число $(n+3)-(n+1) = 2$ не может делиться на $a_k > 2$.

Случай 2 также невозможен. Действительно, среди остатков от деления n на четные числа $2a_1, 2a_2, \ldots 2a_{10}$ по крайней мере восемь — максимальные возможные, то есть нечётные. Значит, n — нечётное число, и потому все остатки от деления его на числа $2a_1, \ldots, 2a_{10}$ нечётны. Таким образом, они — максимальные возможные. Это значит, что $n+1$ делится на все числа

$2a_1, \ldots, 2a_{10}$ и, следовательно, на все числа $a_1, \ldots, a_{10}$, то есть все 20 остатков — максимальные возможные. Противоречие.

Замечание. Можно показать, что ответ остаётся отрицательным, если предположить только, что все числа a_i больше 1.

10.2. Окружность ω, вписанная в остроугольный неравнобедренный треугольник ABC, касается стороны BC в точке D. Пусть точка I — центр окружности ω, а O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Окружность, описанная около треугольника AID, пересекает вторично прямую AO в точке E. Докажите, что длина отрезка AE равна радиусу окружности ω.

(*Л. Емельянов*)

Решение. Пусть для определенности $AB < AC$. Пусть луч DI пересекает отрезки AO и AC в точках P и Q соответственно. Имеем $\angle AIP = \angle DQC - \angle IAC = 90^\circ - \angle C - \angle A/2$ и $\angle IAP = \angle OAB - \angle IAB = (180^\circ - \angle AOB)/2 - \angle A/2 = 90^\circ - \angle C - \angle A/2$. Таким образом, треугольник API равнобедренный ($AP = PI$), то есть точка P лежит на серединном перпендикуляре ℓ к AI, и лучи PA и PI симметричны относительно ℓ. Описанная окружность треугольника AID также симметрична относительно ℓ. Получаем, что отрезки AE и ID тоже симметричны, поэтому они равны.

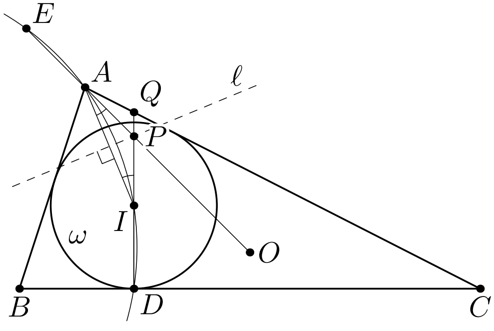

Рис. 2

Замечание 1. Из приведённого решения, в частности, следует, что точка E всегда лежит на продолжении отрезка OA за точку A.

Замечание 2. Из доказанного следует, что степень точки O относительно окружности a, описанной около треугольника AID, равна $R(R+r)$, где R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника ABC. Ясно, что степени точки O относительно окружностей b и c, построенных аналогично a, будут такими же. Из этого следует, что IO является общей радикальной осью трёх окружностей a, b и c, и эти окружности имеют две общие точки: одна — это точка I, а другая лежит на прямой IO. Используя формулу Эйлера для расстояния между I и O, нетрудно найти положение второй точки пересечения указанных окружностей.

10.3. Любые два из действительных чисел a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 отличаются не менее, чем на 1. Оказалось, что для некоторого действительного k выполнены равенства

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=2k \quad \text{и} \quad a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2=2k^2.$$

Докажите, что $k^2 \geqslant 25/3$. (*И. Богданов*)

Решение. Без ограничения общности можно считать, что $a_1 < \ldots < a_5$. По условию, $a_{i+1}-a_i \geqslant 1$ при всех $i=1,2,3,4$. Значит, $a_j - a_i \geqslant j-i$ при всех $1 \leqslant i < j \leqslant 5$. Возведём каждое из полученных неравенств в квадрат и сложим их все. Получим

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 5}(a_j-a_i)^2 \geqslant \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 5}(j-i)^2 = 4\cdot 1^2+3\cdot 2^2+2\cdot 3^2+4^2=50,$$

то есть

$$4\sum_{i=1}^{5}a_i^2 - 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 5}a_ia_j \geqslant 50. \tag{1}$$

С другой стороны, по условию имеем

$$\sum_{i=1}^{5}a_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 5}a_ia_j = (a_1+\ldots+a_5)^2 = 4k^2. \tag{2}$$

Складывая (1) и (2), получаем

$$5\sum_{i=1}^{5}a_i^2 = 10k^2 \geqslant 50+4k^2,$$

откуда $6k^2 \geqslant 50$, или $k^2 \geqslant 25/3$.

Замечание. Условию задачи удовлетворяют, например, числа $a_i=(3-i)+2/\sqrt{3}$, $k=5/\sqrt{3}$. Таким образом, число $25/3$ в условии нельзя заменить на большее.

10.4. Изначально на доске были написаны $n+1$ одночленов 1, x, x^2, …, x^n. Договорившись заранее, k мальчиков каждую минуту одновременно вычисляли каждый сумму каких-то двух многочленов, написанных на доске, и результат дописывали на доску. Через m минут на доске были написаны, среди прочих, многочлены $S_1 = 1 + x$, $S_2 = 1 + x + x^2$, $S_3 = 1 + x + x^2 + x^3$, …, $S_n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$. Докажите, что $m \geqslant 2n/(k+1)$.

(*А. Шаповалов*)

Решение. Рассмотрим конечную ситуацию на доске. Если многочлен P появился как сумма многочленов Q и R, то проведём стрелки из P в Q и R. Далее, если из многочлена F ведёт (ориентированный!) путь в G, будем говорить, что G *участвует* в F (в частности, сам F участвует в F). Нетрудно видеть в этом случае, что все коэффициенты многочлена $F - G$ неотрицательны.

Можно считать, что каждый многочлен на доске — сумма различных степеней x; действительно, если какой-то коэффициент многочлена не меньше 2, то и у всех, в которых он участвует, соответствующий коэффициент также будет не меньше 2. Значит, он не участвует в суммах вида S_i.

Мы собираемся оценить общее количество многочленов на доске. Каждый из многочленов $S_1, \ldots, S_n$ назовём *финальным*. Каждый из многочленов, участвующих в S_n (то есть в сумме всех исходных одночленов), назовём *существенным*. Ясно, что есть n финальных многочленов.

Покажем индукцией по p, что в многочлене с p ненулевыми коэффициентами участвуют ровно $2p - 1$ многочленов (из которых p одночленов); отсюда будет следовать, что количество существенных многочленов равно $2n+1$. База при $p = 1$ очевидна. Пусть теперь многочлен P был получен на некотором шаге как сумма Q и R, и количества ненулевых коэффициентов в P, Q и R равны p, q и r соответственно; тогда $p = q + r$. По предположению индукции, в Q и R участвуют $2q - 1$ и $2p - 1$ многочленов, среди которых нет совпадающих (поскольку в Q и R нет общих одночленов). Тогда в P, с учётом самого P, участвуют $(2q - 1) + (2r - 1) + 1 = 2p - 1$ многочленов.

Покажем, наконец, что в каждую минуту на доске появлялось не более одного финального существенного многочлена. Действительно, пусть в некоторую минуту появились одновременно существенные многочлены S_p и S_q $(p < q)$. Рассмотрим первый момент, когда на доске появился многочлен P, в котором одновременно участвуют и S_p, и S_q; тогда он появился как сумма двух многочленов, каждый из которых содержит одночлен x^p. Но тогда коэффициент при x^p в P не меньше 2, что невозможно.

Итак, на доске есть n финальных и $2n+1$ существенных многочленов, при этом не больше m из них являются и теми, и другими. Значит, общее количество многочленов на доске не меньше, чем $n+(2n+1)-m$. С другой стороны, исходно на доске было $n+1$ многочленов, а добавилось не больше, чем mk. Значит, $(n+1)+mk \geqslant n+(2n+1)-m$, или $m(k+1) \geqslant 2n$, что и требовалось доказать.

Замечание. Если зафиксировать натуральное k, то при всех достаточно больших n оценка в задаче точна.

11 класс

11.1. Изначально на столе лежат 111 кусков пластилина одинаковой массы. За одну операцию можно выбрать несколько групп по одинаковому количеству кусков и в каждой группе весь пластилин слепить в один кусок. За какое наименьшее количество операций можно получить ровно 11 кусков, любые два из которых имеют различные массы? (*И. Богданов*)

Ответ. За две операции.

Решение. Пусть масса одного исходного куска равна 1. Если при первой операции в каждой группе k кусков, то после неё каждый кусок будет иметь массу 1 или k; значит, одиннадцати кусков различной массы за одну операцию получить не удастся.

Покажем, что за две операции требуемое сделать можно. На первой операции выберем 37 групп по 2 куска; после операции получатся по 37 кусков с массами 1 и 2. На второй операции выберем 9 групп по 8 кусков: в i-й группе $(1 \leqslant i \leqslant 9)$ будет $i-1$

кусков массы 2 и $9-i$ кусков массы 1. Тогда останутся неиспользованными два куска масс 1 и 2, а из i-й группы получится кусок массы $9-i+2(i-1)=7+i$. Итак, получатся 11 кусков с массами 1, 2, 8, 9, …, 16, что и требовалось.

Замечание. Можно показать, что приведённый способ — единственный возможный.

11.2. Любые два из действительных чисел a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 отличаются не менее, чем на 1. Оказалось, что для некоторого действительного k выполнены равенства

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=2k \quad \text{и} \quad a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2=2k^2.$$

Докажите, что $k^2 \geqslant 25/3$. (*И. Богданов*)

Решение. Без ограничения общности можно считать, что $a_1<\ldots<a_5$. По условию, $a_{i+1}-a_i \geqslant 1$ при всех $i=1,2,3,4$. Значит, $a_j-a_i \geqslant j-i$ при всех $1 \leqslant i<j \leqslant 5$. Возведём каждое из полученных неравенств в квадрат и сложим их все. Получим

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 5}(a_j-a_i)^2 \geqslant \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 5}(j-i)^2=4\cdot 1^2+3\cdot 2^2+2\cdot 3^2+4^2=50,$$

то есть

$$4\sum_{i=1}^{5}a_i^2-2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 5}a_ia_j \geqslant 50. \tag{1}$$

С другой стороны, по условию имеем

$$\sum_{i=1}^{5}a_i^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 5}a_ia_j=(a_1+\ldots+a_5)^2=4k^2. \tag{2}$$

Складывая (1) и (2), получаем

$$5\sum_{i=1}^{5}a_i^2=10k^2 \geqslant 50+4k^2,$$

откуда $6k^2 \geqslant 50$, или $k^2 \geqslant 25/3$.

Замечание. Условию задачи удовлетворяют, например, числа $a_i=(3-i)+2/\sqrt{3}$, $k=5/\sqrt{3}$. Таким образом, число $25/3$ в условии нельзя заменить на большее.

11.3. Клетчатая плоскость раскрашена в шахматном порядке в чёрный и белый цвета. Затем белые клетки снова раскрашены в красный и синий цвета так, чтобы клетки, соседние по углу, были разноцветными. Пусть ℓ — прямая, не параллельная сторонам клеток. Для каждого отрезка I, параллельного ℓ, посчитаем разность сумм длин его красных и синих участков. Докажите, что существует число C (зависящее только от прямой ℓ) такое, что все полученные разности не превосходят C.

(*И. Богданов, К. Сухов*)

Решение. Лемма. *Раскрасим клетки плоскости в два цвета: нечётные столбцы в зелёный цвет, а чётные — в жёлтый. Тогда для любого отрезка, параллельного прямой ℓ, разность сумм длин его зелёных и жёлтых участков не превосходит некоторого числа D, зависящего только от ℓ.*

Доказательство. Прямая ℓ разбивается вертикальными сторонами клеток на отрезки одинаковой длины; обозначим эту длину через F. Тогда для любого отрезка длины $2F$, параллельного ℓ, суммы длин его зелёных и жёлтых частей равны F. А любой отрезок, параллельный ℓ, разбивается на такие отрезки и остаток длины, меньшей $2F$; поэтому разность сумм длин его зелёных и жёлтых частей не превосходит $D = 2F$. $\square$

Перейдём к решению задачи. Раскрасим все чёрные клетки в розовый и голубой цвета так, чтобы розовые клетки были в тех же столбцах, что и красные, а голубые — в тех же, что и синие (см. рис. 3). Рассмотрим любой отрезок, параллельный ℓ, и обозначим через r, b, r', b' суммы длин его красных, синих, розовых и голубых частей, соответственно. Тогда по лемме существуют такие числа D_1, D_2, зависящие только от ℓ, что $|(r+r')-(b+b')| \leqslant D_1$, $|(r+b')-(r'+b)| \leqslant D_2$. Значит,

К	Г	К	Г
Р	С	Р	С
К	Г	К	Г
Р	С	Р	С

Рис. 3

$$2|r-b| = |(r+r')-(b+b')+(r+b')-(r'+b)| \leqslant$$
$$\leqslant |(r+r')-(b+b')| + |(r+b')-(r'+b)| \leqslant D_1 + D_2,$$

то есть $|r-b| \leqslant \dfrac{D_1+D_2}{2}$, что и требовалось доказать.

Замечание. На самом деле в лемме можно положить $D = F$.

11.4. Дана пирамида $SA_1A_2\ldots A_n$, основание которой — выпуклый многоугольник $A_1\ldots A_n$. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ в плоскости основания построили треугольник $X_iA_iA_{i+1}$, равный треугольнику SA_iA_{i+1} и лежащий по ту же сторону от прямой A_iA_{i+1}, что и основание (мы полагаем $A_{n+1} = A_1$). Докажите, что построенные треугольники покрывают всё основание.

(*И. Пак*)

Первое решение. Рассмотрим произвольную точку P основания и докажем, что она покрыта одним из треугольников. Рассмотрим маленькую сферу, лежащую внутри пирамиды и касающуюся основания в точке P (такая, очевидно, найдётся). Начнём увеличивать её радиус, сохраняя условие касания; тогда в некоторый момент она впервые коснётся боковой поверхности пирамиды. Пусть, скажем, она коснулась грани SA_1A_2 в точке Q (см. рис. 4). Тогда $PA_1 = QA_1$, $PA_2 = QA_2$ как касательные из одной точки; стало быть, треугольники PA_1A_2 и QA_1A_2 равны. Это значит, что при повороте грани SA_1A_2 вокруг A_1A_2, переводящем её в $X_1A_1A_2$, точка Q переходит в P, то есть P лежит внутри $X_1A_1A_2$.

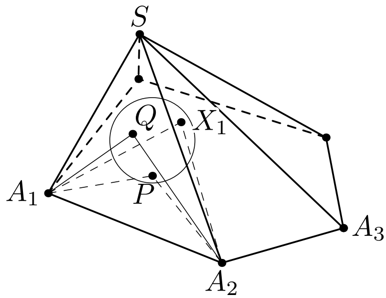

Рис. 4

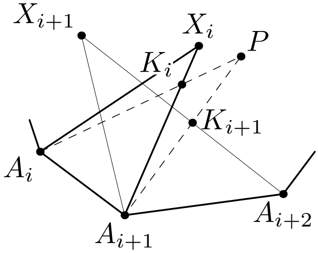

Рис. 5

Второе решение. Предположим, что некоторая точка P основания не покрыта треугольниками. Если $\angle PA_1A_2 \leqslant \angle X_1A_1A_2$ и $\angle PA_2A_1 \leqslant \angle X_1A_2A_1$, то треугольник $X_1A_1A_2$ накрывает P. Значит, без ограничения общности можно считать, что $\angle PA_2A_1 > \angle X_1A_2A_1$.

Если α, β, γ — плоские углы трёхгранного угла, то $\alpha < \beta + \gamma$; поэтому $\angle A_1A_2A_3 < \angle A_1A_2S + \angle A_3A_2S = \angle X_1A_2A_1 + \angle X_2A_2A_3 < \angle PA_2A_1 + \angle X_2A_2A_3$. Значит, $\angle PA_2A_3 = \angle A_1A_2A_3 - \angle PA_2A_1 < \angle X_2A_2A_3$. Если вдобавок и $\angle PA_3A_2 \leqslant$

$\leqslant \angle X_2A_3A_2$, то треугольник $X_2A_2A_3$ накрывает P, что неверно. Значит, $\angle PA_3A_2 > \angle X_2A_3A_2$.

Итак, из неравенства $\angle PA_2A_1 > \angle X_1A_2A_1$ мы получили, что $\angle PA_2A_3 < \angle X_2A_2A_3$ и $\angle PA_3A_2 > \angle X_2A_3A_2$. Продолжая такие рассуждения дальше, получаем, что при любом $i = 1, 2, \ldots, n$ верны неравенства $\angle PA_iA_{i+1} < \angle X_iA_iA_{i+1}$ и $\angle PA_{i+1}A_i > \angle X_iA_{i+1}A_i$. Это значит, что отрезки X_iA_{i+1} и PA_i пересекаются (см. рис. 5). Обозначив точку их пересечения через K_i, из неравенства треугольника получаем, что $X_iA_i+PA_{i+1} < (X_iK_i+K_iA_i)+(PK_i+K_iA_{i+1}) = X_iA_{i+1}+PA_i$, то есть $SA_i + PA_{i+1} < SA_{i+1} + PA_i$. Но, складывая такие неравенства при всех $i = 1, 2, \ldots, n$, получаем $(SA_1 + \ldots + SA_n) + (PA_1 + \ldots + PA_n) < (SA_1 + \ldots + SA_n) + (PA_1 + \ldots + PA_n)$, что неверно. Противоречие.