9 класс

Первый день

9.1. На доске написаны несколько чисел. Известно, что квадрат любого записанного числа больше произведения любых двух других записанных чисел. Какое наибольшее количество чисел может быть на доске?

9.2. Окружности ω_1 и ω_2 касаются внешним образом в точке P. Через центр ω_1 проведена прямая ℓ_1, касающаяся ω_2. Аналогично, прямая ℓ_2 касается ω_1 и проходит через центр ω_2. Оказалось, что прямые ℓ_1 и ℓ_2 непараллельны. Докажите, что точка P лежит на биссектрисе одного из углов, образованных ℓ_1 и ℓ_2.

9.3. За круглым столом сидят 30 человек — рыцари и лжецы (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Известно, что у каждого из них ровно один друг, причем у рыцаря этот друг — лжец, а у лжеца этот друг — рыцарь (дружба всегда взаимна). На вопрос «Сидит ли рядом с вами ваш друг?» сидевшие через одного ответили «да». Сколько из остальных могли также ответить «да»? (Перечислите все варианты и докажите, что других нет.)

9.4. Целые числа a и b таковы, что при любых натуральных m и n число am^2+bn^2 является точным квадратом. Докажите, что $ab = 0$.

XXXVIII Всероссийская математическая олимпиада школьников

9 класс

Первый день

9.1. На доске написаны несколько чисел. Известно, что квадрат любого записанного числа больше произведения любых двух других записанных чисел. Какое наибольшее количество чисел может быть на доске?

9.2. Окружности ω_1 и ω_2 касаются внешним образом в точке P. Через центр ω_1 проведена прямая ℓ_1, касающаяся ω_2. Аналогично, прямая ℓ_2 касается ω_1 и проходит через центр ω_2. Оказалось, что прямые ℓ_1 и ℓ_2 непараллельны. Докажите, что точка P лежит на биссектрисе одного из углов, образованных ℓ_1 и ℓ_2.

9.3. За круглым столом сидят 30 человек — рыцари и лжецы (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Известно, что у каждого из них ровно один друг, причем у рыцаря этот друг — лжец, а у лжеца этот друг — рыцарь (дружба всегда взаимна). На вопрос «Сидит ли рядом с вами ваш друг?» сидевшие через одного ответили «да». Сколько из остальных могли также ответить «да»? (Перечислите все варианты и докажите, что других нет.)

9.4. Целые числа a и b таковы, что при любых натуральных m и n число am^2+bn^2 является точным квадратом. Докажите, что $ab = 0$.

10 класс

Первый день

10.1. Даны десять положительных чисел, любые два из которых различны. Докажите, что среди них найдутся либо три числа, произведение которых больше произведения каких-нибудь двух из оставшихся, либо три числа, произведение которых больше произведения каких-нибудь четырех из оставшихся.

10.2. Дан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$. Известно, что $\angle FAE = \angle BDC$, а четырехугольники $ABDF$ и $ACDE$ являются вписанными. Докажите, что прямые BF и CE параллельны.

10.3. Последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots$ задана условиями $a_1 = 1$, $a_2 = 143$ и $a_{n+1} = 5 \cdot \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ при всех $n \geqslant 2$. Докажите, что все члены последовательности — целые числа.

10.4. На окружности отмечено $2N$ точек (N — натуральное число). Известно, что через любую точку внутри окружности проходит не более двух хорд с концами в отмеченных точках. Назовем *паросочетанием* такой набор из N хорд с концами в отмеченных точках, что каждая отмеченная точка является концом ровно одной из этих хорд. Назовём паросочетание *чётным*, если количество точек, в которых пересекаются его хорды, чётно, и *нечётным* иначе. Найдите разность между количеством чётных и нечётных паросочетаний.

XXXVIII Всероссийская математическая олимпиада школьников

10 класс

Первый день

10.1. Даны десять положительных чисел, любые два из которых различны. Докажите, что среди них найдутся либо три числа, произведение которых больше произведения каких-нибудь двух из оставшихся, либо три числа, произведение которых больше произведения каких-нибудь четырех из оставшихся.

10.2. Дан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$. Известно, что $\angle FAE = \angle BDC$, а четырехугольники $ABDF$ и $ACDE$ являются вписанными. Докажите, что прямые BF и CE параллельны.

10.3. Последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots$ задана условиями $a_1 = 1$, $a_2 = 143$ и $a_{n+1} = 5 \cdot \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ при всех $n \geqslant 2$. Докажите, что все члены последовательности — целые числа.

10.4. На окружности отмечено $2N$ точек (N — натуральное число). Известно, что через любую точку внутри окружности проходит не более двух хорд с концами в отмеченных точках. Назовем *паросочетанием* такой набор из N хорд с концами в отмеченных точках, что каждая отмеченная точка является концом ровно одной из этих хорд. Назовём паросочетание *чётным*, если количество точек, в которых пересекаются его хорды, чётно, и *нечётным* иначе. Найдите разность между количеством чётных и нечётных паросочетаний.

11 класс

Первый день

11.1. Бесконечная возрастающая арифметическая прогрессия такова, что произведение любых двух её членов — также член этой прогрессии. Докажите, что все её члены — целые числа.

11.2. Через вершины основания четырёхугольной пирамиды $SABCD$ проведены прямые, параллельные противоположным боковым ребрам (через вершину A — параллельно SC, и так далее). Эти четыре прямые пересеклись в одной точке. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

11.3. На плоскости нарисованы $n > 2$ различных векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ с равными длинами. Оказалось, что все векторы

$$-\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n, \quad \vec{a}_1 - \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \ldots + \vec{a}_n, \quad \ldots, \quad \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_{n-1} - \vec{a}_n$$

также имеют равные длины. Докажите, что $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n = \vec{0}$.

11.4. Главная аудитория фирмы «Рога и копыта» представляет собой квадратный зал из восьми рядов по восемь мест. 64 сотрудника фирмы писали в этой аудитории тест, в котором было шесть вопросов с двумя вариантами ответа на каждый. Могло ли так оказаться, что среди наборов ответов сотрудников нет одинаковых, причем наборы ответов любых двух людей за соседними столами совпали не больше, чем в одном вопросе? (Столы называются соседними, если они стоят рядом в одном ряду или друг за другом в соседних рядах.)

XXXVIII Всероссийская математическая олимпиада школьников

11 класс

Первый день

11.1. Бесконечная возрастающая арифметическая прогрессия такова, что произведение любых двух её членов — также член этой прогрессии. Докажите, что все её члены — целые числа.

11.2. Через вершины основания четырёхугольной пирамиды $SABCD$ проведены прямые, параллельные противоположным боковым ребрам (через вершину A — параллельно SC, и так далее). Эти четыре прямые пересеклись в одной точке. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

11.3. На плоскости нарисованы $n > 2$ различных векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ с равными длинами. Оказалось, что все векторы

$$-\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n, \quad \vec{a}_1 - \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \ldots + \vec{a}_n, \quad \ldots, \quad \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_{n-1} - \vec{a}_n$$

также имеют равные длины. Докажите, что $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n = \vec{0}$.

11.4. Главная аудитория фирмы «Рога и копыта» представляет собой квадратный зал из восьми рядов по восемь мест. 64 сотрудника фирмы писали в этой аудитории тест, в котором было шесть вопросов с двумя вариантами ответа на каждый. Могло ли так оказаться, что среди наборов ответов сотрудников нет одинаковых, причем наборы ответов любых двух людей за соседними столами совпали не больше, чем в одном вопросе? (Столы называются соседними, если они стоят рядом в одном ряду или друг за другом в соседних рядах.)