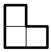
9 класс

Второй день

9.5. По кругу расставлено $2n$ действительных чисел, сумма которых положительна. Для каждого из них рассмотрим обе группы из n подряд стоящих чисел, в которых это число является крайним. Докажите, что найдется число, для которого сумма чисел в каждой из двух таких групп положительна.

9.6. Петя и Вася придумали десять квадратных трёхчленов. Затем Вася по очереди называл последовательные натуральные числа (начиная с некоторого), а Петя каждое названное число подставлял в один из трёхчленов по своему выбору и записывал полученные значения на доску слева направо. Оказалось, что числа, записанные на доске, образуют арифметическую прогрессию (именно в этом порядке). Какое максимальное количество чисел Вася мог назвать?

9.7. На сторонах остроугольного треугольника ABC вне него построены квадраты $CAKL$ и $CBMN$. Прямая CN пересекает отрезок AK в точке X, а прямая CL пересекает отрезок BM в точке Y. Точка P, лежащая внутри треугольника ABC, является точкой пересечения окружностей, описанных около треугольников KXN и LYM. Точка S — середина отрезка AB. Докажите, что $\angle ACS = \angle BCP$.

9.8. Из клетчатого квадрата 55×55 вырезали по границам клеток 400 трёхклеточных уголков  (повёрнутых как угодно) и ещё 500 клеток. Докажите, что какие-то две вырезанные фигуры имеют общий отрезок границы.

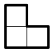
9 класс

Второй день

9.5. По кругу расставлено $2n$ действительных чисел, сумма которых положительна. Для каждого из них рассмотрим обе группы из n подряд стоящих чисел, в которых это число является крайним. Докажите, что найдется число, для которого сумма чисел в каждой из двух таких групп положительна.

9.6. Петя и Вася придумали десять квадратных трёхчленов. Затем Вася по очереди называл последовательные натуральные числа (начиная с некоторого), а Петя каждое названное число подставлял в один из трёхчленов по своему выбору и записывал полученные значения на доску слева направо. Оказалось, что числа, записанные на доске, образуют арифметическую прогрессию (именно в этом порядке). Какое максимальное количество чисел Вася мог назвать?

9.7. На сторонах остроугольного треугольника ABC вне него построены квадраты $CAKL$ и $CBMN$. Прямая CN пересекает отрезок AK в точке X, а прямая CL пересекает отрезок BM в точке Y. Точка P, лежащая внутри треугольника ABC, является точкой пересечения окружностей, описанных около треугольников KXN и LYM. Точка S — середина отрезка AB. Докажите, что $\angle ACS = \angle BCP$.

9.8. Из клетчатого квадрата 55×55 вырезали по границам клеток 400 трёхклеточных уголков  (повёрнутых как угодно) и ещё 500 клеток. Докажите, что какие-то две вырезанные фигуры имеют общий отрезок границы.

10 класс

Второй день

10.5. Существует ли такое натуральное n, что для любых ненулевых цифр a и b число $\overline{anb}$ делится на $\overline{ab}$? (Здесь через $\overline{x\ldots y}$ обозначено число, получаемое приписыванием друг к другу десятичных записей чисел $x, \ldots, y$.)

10.6. Петя и Вася придумали десять многочленов пятой степени. Затем Вася по очереди называл последовательные натуральные числа (начиная с некоторого), а Петя каждое названное число подставлял в один из многочленов по своему выбору и записывал полученные значения на доску слева направо. Оказалось, что числа, записанные на доске, образуют арифметическую прогрессию (именно в этом порядке). Какое максимальное количество чисел Вася мог назвать?

10.7. Окружность с центром I, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Пусть I_a, I_b, I_c — центры вневписанных окружностей треугольника ABC, касающихся соответственно сторон BC, CA, AB. Отрезки I_aB_1 и I_bA_1 пересекаются в точке C_2. Аналогично, отрезки I_bC_1 и I_cB_1 пересекаются в точке A_2, а отрезки I_cA_1 и I_aC_1 — в точке B_2. Докажите, что I является центром окружности, описанной около треугольника $A_2B_2C_2$.

10.8. На плоскости нарисован квадрат, стороны которого горизонтальны и вертикальны. В нём проведены несколько отрезков, параллельных сторонам, причем никакие два отрезка не лежат на одной прямой и не пересекаются по точке, внутренней для обоих отрезков. Оказалось, что отрезки разбили квадрат на прямоугольники, причём любая вертикальная прямая, пересекающая квадрат и не содержащая отрезков разбиения, пересекает ровно k прямоугольников разбиения, а любая горизонтальная прямая, пересекающая квадрат и не содержащая отрезков разбиения — ровно ℓ прямоугольников. Каким могло оказаться количество прямоугольников разбиения?

10 класс

Второй день

10.5. Существует ли такое натуральное n, что для любых ненулевых цифр a и b число $\overline{anb}$ делится на $\overline{ab}$? (Здесь через $\overline{x \ldots y}$ обозначено число, получаемое приписыванием друг к другу десятичных записей чисел x, ..., y.)

10.6. Петя и Вася придумали десять многочленов пятой степени. Затем Вася по очереди называл последовательные натуральные числа (начиная с некоторого), а Петя каждое названное число подставлял в один из многочленов по своему выбору и записывал полученные значения на доску слева направо. Оказалось, что числа, записанные на доске, образуют арифметическую прогрессию (именно в этом порядке). Какое максимальное количество чисел Вася мог назвать?

10.7. Окружность с центром I, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Пусть I_a, I_b, I_c — центры вневписанных окружностей треугольника ABC, касающихся соответственно сторон BC, CA, AB. Отрезки I_aB_1 и I_bA_1 пересекаются в точке C_2. Аналогично, отрезки I_bC_1 и I_cB_1 пересекаются в точке A_2, а отрезки I_cA_1 и I_aC_1 — в точке B_2. Докажите, что I является центром окружности, описанной около треугольника $A_2B_2C_2$.

10.8. На плоскости нарисован квадрат, стороны которого горизонтальны и вертикальны. В нём проведены несколько отрезков, параллельных сторонам, причем никакие два отрезка не лежат на одной прямой и не пересекаются по точке, внутренней для обоих отрезков. Оказалось, что отрезки разбили квадрат на прямоугольники, причём любая вертикальная прямая, пересекающая квадрат и не содержащая отрезков разбиения, пересекает ровно k прямоугольников разбиения, а любая горизонтальная прямая, пересекающая квадрат и не содержащая отрезков разбиения — ровно ℓ прямоугольников. Каким могло оказаться количество прямоугольников разбиения?

11 класс

Второй день

11.5. Из целых чисел от 0 до 1000 выбрали 101 число. Докажите, что среди модулей их попарных разностей есть десять различных чисел, не превосходящих 100.

11.6. Положительные числа a, b, c и d удовлетворяют условию $2(a+b+c+d) \geqslant abcd$. Докажите, что $a^2+b^2+c^2+d^2 \geqslant abcd$.

11.7. Глава Монетного двора хочет выпустить монеты 12 номиналов (каждый — в натуральное число рублей) так, чтобы любую сумму от 1 до 6543 рублей можно было заплатить без сдачи, используя не более 8 монет. Сможет ли он это сделать? (При уплате суммы можно использовать несколько монет одного номинала.)

11.8. В треугольник ABC вписана окружность ω с центром в точке I. Около треугольника AIB описана окружность Γ. Окружности ω и Γ пересекаются в точках X и Y. Общие касательные к окружностям ω и Γ пересекаются в точке Z. Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABC и XYZ, касаются.

11 класс

Второй день

11.5. Из целых чисел от 0 до 1000 выбрали 101 число. Докажите, что среди модулей их попарных разностей есть десять различных чисел, не превосходящих 100.

11.6. Положительные числа a, b, c и d удовлетворяют условию $2(a+b+c+d) \geqslant abcd$. Докажите, что $a^2+b^2+c^2+d^2 \geqslant abcd$.

11.7. Глава Монетного двора хочет выпустить монеты 12 номиналов (каждый — в натуральное число рублей) так, чтобы любую сумму от 1 до 6543 рублей можно было заплатить без сдачи, используя не более 8 монет. Сможет ли он это сделать? (При уплате суммы можно использовать несколько монет одного номинала.)

11.8. В треугольник ABC вписана окружность ω с центром в точке I. Около треугольника AIB описана окружность Γ. Окружности ω и Γ пересекаются в точках X и Y. Общие касательные к окружностям ω и Γ пересекаются в точке Z. Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABC и XYZ, касаются.