Материалы для проведения заключительного этапа

XXXIX ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2012–2013 учебный год

Второй день

Саров, 23–29 апреля 2013 г.

Москва, 2013

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа XXXIX Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Акопян, А. В. Антропов, Д. С. Бабичев, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, С. Г. Волчёнков, А. И. Гарбер, А. С. Голованов, О. Ю. Дмитриев, В. Л. Дольников, Л. А. Емельянов, Р. Г. Женодаров, Г. М. Иванов, Ф. А. Ивлев, П. А. Кожевников, М. А. Кунгожин, А. Н. Магазинов, И. В. Митрофанов, В. Б. Мокин, Е. Г. Молчанов, В. А. Омельяненко, А. В. Пастор, А. А. Пахарев, О. К. Подлипский, А. А. Полянский, И. С. Рубанов, В. А. Сендеров, К. А. Сухов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, В. А. Шмаров.

В скобках после каждой задачи указана фамилия ее автора.

Компьютерный макет: И. И. Богданов.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Запрещается публикация или размещение в сети Интернет условий или решений задач олимпиады.

Условия и решения задач

9 класс

9.5. По кругу расставлено $2n$ действительных чисел, сумма которых положительна. Для каждого из них рассмотрим обе группы из n подряд стоящих чисел, в которых это число является крайним. Докажите, что найдется число, для которого сумма чисел в каждой из двух таких групп положительна. (*А. Грибалко*)

Решение. Обозначим данные числа в порядке обхода по часовой стрелке через $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$; обозначим через $S > 0$ сумму всех чисел, и положим $S_i = a_i + a_{i+1} + \ldots + a_{i+n-1}$ (все индексы рассматриваются по модулю $2n$, так что $a_{2n+i} = a_i$ и $S_{2n+i} = S_i$). Тогда нам надо доказать, что при некотором i обе суммы S_i и S_{i+1-n} положительны. Заметим, что $S_i + S_{n+i} = S > 0$, так что среди чисел S_i есть положительные.

Если все суммы S_i положительны, то любой индекс i подходит. В противном случае найдётся такой индекс i, что $S_i > 0$, а $S_{i+1} \leqslant 0$. Тогда $S_{i+1-n} = S - S_{i+1} > 0$, и индекс i — искомый.

9.6. Петя и Вася придумали десять квадратных трёхчленов. Затем Вася по очереди называл последовательные натуральные числа (начиная с некоторого), а Петя каждое названное число подставлял в один из трёхчленов по своему выбору и записывал полученные значения на доску слева направо. Оказалось, что числа, записанные на доске, образуют арифметическую прогрессию (именно в этом порядке). Какое максимальное количество чисел Вася мог назвать? (*А. Голованов*)

Ответ. 20 чисел.

Решение. Покажем, что в каждый трёхчлен $P(x)$ Петя мог подставить не более двух чисел. Действительно, пусть n-й член получившейся арифметической прогрессии равен $an + b$, а n-е из Васиных последовательных чисел равно $k + n$. Тогда Петя мог подставить это число в $P(x)$, если $P(k + n) = an + b$, а это квадратное уравнение относительно n имеет не более двух корней.

Поэтому всего чисел не могло быть больше 20. Осталось показать, что 20 чисел могли получиться. Пусть, например, были выбраны трёхчлены $P_k(x) = (x - (2k-1))(x - 2k) + x$ при $k = 1, 2, \ldots, 10$, и Вася называл числа 1, 2, …, 20. Так как $P_k(2k-1) = 2k - 1$ и $P_k(2k) = 2k$, то у Пети могли получаться последовательно числа 1, 2, …, 20.

9.7. На сторонах остроугольного треугольника ABC вне него построены квадраты $CAKL$ и $CBMN$. Прямая CN пересекает отрезок AK в точке X, а прямая CL пересекает отрезок BM в точке Y. Точка P, лежащая внутри треугольника ABC, является точкой пересечения окружностей, описанных около треугольников KXN и LYM. Точка S — середина отрезка AB. Докажите, что $\angle ACS = \angle BCP$. (*И. Богданов*)

Решение. Пусть Q — точка пересечения прямых KL и MN (см. рис. 1). Поскольку $\angle QLC = \angle NMY = 90°$, четырёхугольник $QLYM$ — вписанный. Аналогично, четырёхугольник $QNXK$ — вписанный. Тем самым, Q — вторая точка пересечения окружностей ω_1 и ω_2, описанных около треугольников KXN и LYM соответственно.

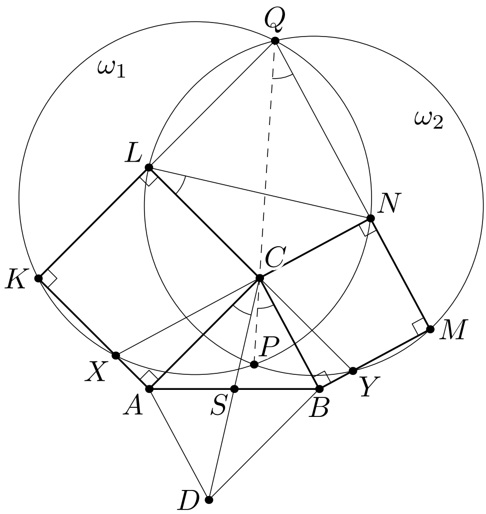
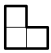


Рис. 1

Докажем, что C лежит на прямой PQ. Прямоугольные треугольники CAX и CBY подобны, так как $\angle XCA = 90^\circ - \angle ACB = \angle YCB$. Отсюда $XC \cdot CB = YC \cdot CA$ или $XC \cdot CN = YC \cdot CL$, то есть *степени* точки C относительно окружностей ω_1 и ω_2 равны, значит, C лежит на их *радикальной оси* PQ. (Чтобы доказать это без использования радикальных осей, достаточно отложить на прямой CP за точку C отрезок CQ' такой, что $CQ' \cdot CP = XC \cdot CN = YC \cdot CL$. Из равенств произведений вытекает, что Q' лежит на каждой из окружностей ω_1 и ω_2, то есть $Q' = Q$.)

Продлив медиану CS на её длину, достроим треугольник ABC до параллелограмма $ACBD$. Так как $\angle CAD = 180^\circ - \angle ACB = \angle LCN$, $CA = CL$ и $AD = CB = CN$, треугольники CAD и LCN равны. Отсюда $\angle ACS = \angle ACD = \angle CLN$. Так как четырёхугольник $QLCN$ вписанный ($\angle QLC = \angle QNC = 90^\circ$), то $\angle CLN = \angle CQN = \angle PCB$ (поскольку $BC \parallel MN$). Итак, $\angle ACS = \angle CLN = \angle PCB$, что и требовалось доказать.

Замечание. Можно показать, что треугольники PAC и PCB подобны; так что P — центр *поворотной гомотетии*, переводящей квадрат $AKLC$ в квадрат $CNMB$.

9.8. Из клетчатого квадрата 55×55 вырезали по границам клеток 400 трёхклеточных уголков  (повёрнутых как угодно) и ещё 500 клеток. Докажите, что какие-то две вырезанные фигуры имеют общий отрезок границы. (*С. Берлов*)

Решение. Первое решение. Добавим к каждой фигуре такую каёмку, как показано на рис. 2. Предположим, что вырезанные фигуры не имеют общих сторон. Тогда фигуры с добавленными каёмками не накладываются друг на друга. Действительно, каёмка фигурки F состоит ровно из тех точек, расстояние от которых до F не больше, чем расстояние до любой клетки, не имеющей общих сторон с F. Значит, если точка X лежит в каёмках двух фигурок (не имеющих общих сторон), то расстояние от X до первой фигурки не больше, чем до второй, и одновременно не меньше, чем до второй. Тогда эти расстояния равны, то есть X лежит на границах обеих каёмок.

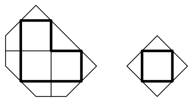


Рис. 2

Таким образом, фигуры с каёмками не должны перекрываться. Далее, площадь «уголка» с каёмкой равна $\frac{11}{2}$, а площадь клетки с каёмкой равна 2. Так как вырезано 400 «уголков» и 500 клеток, то суммарная площадь этих фигур с каёмками составит $2200 + 1000 = 3200$. Но все эти фигуры с каёмками лежат в квадрате 56×56 с тем же центром, что и исходный. Площадь этого квадрата равна $3136 < 3200$: значит, каёмки не могут не накладываться.

Второе решение. Опять же предположим, что фигуры не имеют общих сторон. Рассмотрим квадрат до вырезания, нарисуем все стороны клеточек вырезанных фигур, и к каждому «уголку» добавим две половинки сторон клеток, как показано на рис. 3. Заметим, что сторона клетки, половина которой добавлена, не может принадлежать никакой другой фигуре. Отсюда легко видеть, что никакие нарисованные отрезки не накладываются.

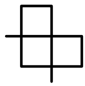


Рис. 3

Заметим, что для каждого «уголка» мы нарисовали отрезки суммарной длины 11, а для клетки — суммарной длины 4. Значит, суммарная длина всех нарисованных отрезков равна $4400 + 2000 = 6400$. С другой стороны, все эти отрезки лежат на 56 горизонтальных отрезках длины 56 (выступающих за квадрат на $\frac{1}{2}$ в обе стороны) и 56 аналогичных вертикальных отрезках; значит, их суммарная длина не больше $2 \cdot 56^2 = 6272 < 6400$. Противоречие.

Замечание 1. Оценку из второго решения можно немного уточнить, заметив, что за левую сторону квадрата отрезок может выступать не чаще, чем в каждой третьей горизонтали; то же верно и для других сторон.

Замечание 2. Подобная оценка близка к точной для любого квадрата. Действительно, на клетчатой плоскости можно разместить «уголки» и клетки так, как показано на рис. 4; в любом достаточно большом квадрате количества попавших в него «уголков» и клеток будут относиться примерно как $4 : 5$. При этом вся плоскость разбивается на каёмки из первого решения,

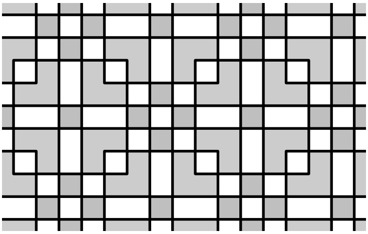


Рис. 4

а все стороны клеток разбиваются на отрезки из второго решения.

10 класс

10.5. Существует ли такое натуральное n, что для любых ненулевых цифр a и b число $\overline{anb}$ делится на $\overline{ab}$? (Здесь через $\overline{x\ldots y}$ обозначено число, получаемое приписыванием друг к другу десятичных записей чисел $x, \ldots, y$.) (*В. Сендеров*)

Ответ. Нет, не существует.

Решение. Предположим, что такое число $n = \overline{n_k n_{k-1} \ldots n_1}$ существует. Тогда $\overline{1n2} \vdots 12 \vdots 4$. Но число делится на 4 тогда и только тогда, когда число, составленное из его последних двух цифр, делится на 4; значит, $\overline{n_1 2} \vdots 4$. Аналогично из $\overline{2n4} \vdots 24 \vdots 4$ получаем $\overline{n_1 4} \vdots 4$. Значит, и число $\overline{n_1 4} - \overline{n_1 2} = 2$ делится на 4, что не так.

10.6. Петя и Вася придумали десять многочленов пятой степени. Затем Вася по очереди называл последовательные натуральные числа (начиная с некоторого), а Петя каждое названное число подставлял в один из многочленов по своему выбору и записывал полученные значения на доску слева направо. Оказалось, что числа, записанные на доске, образуют арифметическую прогрессию (именно в этом порядке). Какое максимальное количество чисел Вася мог назвать? (*А. Голованов*)

Ответ. 50 чисел.

Решение. Покажем, что в каждый многочлен $P(x)$ Петя мог подставить не более пяти чисел. Действительно, пусть n-й член получившейся арифметической прогрессии равен $an + b$, а n-е из Васиных последовательных чисел равно $k+n$. Тогда Петя мог подставить это число в $P(x)$, если $P(k+n) = an + b$, а это — уравнение пятой степени относительно n, поэтому оно имеет не более пяти корней.

Итак, всего чисел не могло быть больше 50. Осталось показать, что 50 чисел могли получиться. Пусть, например, были выбраны многочлены

$$P_k(x) = x + (x - (5k-4)) \cdot (x - (5k-3)) \cdot \ldots \cdot (x - 5k)$$

при $k = 1, 2, \ldots, 10$, и Вася называл числа 1, 2, …, 50. Так как $P_k(5k - i) = 5k - i$ при $i = 0, 1, \ldots, 4$, у Пети могли получаться последовательно числа 1, 2, …, 50.

10.7. Окружность с центром I, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Пусть I_a, I_b, I_c — центры вневписанных окружностей треугольника ABC, касающихся соответственно сторон BC, CA, AB. Отрезки I_aB_1 и I_bA_1 пересекаются в точке C_2. Аналогично, отрезки I_bC_1 и I_cB_1 пересекаются в точке A_2, а отрезки I_cA_1 и I_aC_1 — в точке B_2. Докажите, что I является центром окружности, описанной около треугольника $A_2B_2C_2$.

(*Л. Емельянов, А. Полянский*)

Решение. Прямые B_1C_1 и I_bI_c параллельны, так как обе эти прямые перпендикулярны биссектрисе AI угла BAC. Аналогично, $C_1A_1 \parallel I_cI_a$ и $A_1B_1 \parallel I_aI_b$; значит, треугольники $A_1B_1C_1$ и $I_aI_bI_c$ гомотетичны.

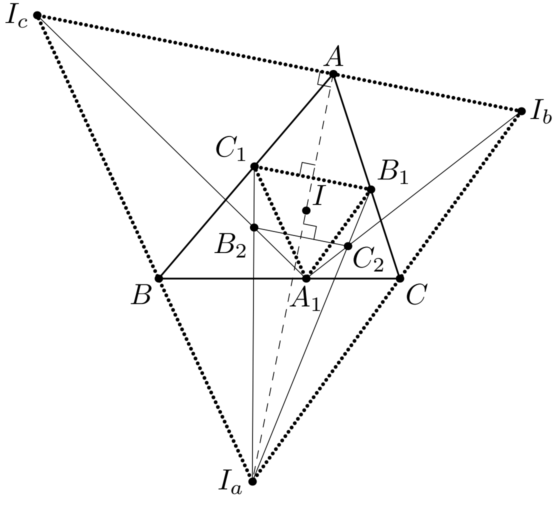


Рис. 5

Треугольники $A_1C_1B_2$ и $I_cI_aB_2$ подобны, так как их соответственные стороны параллельны. Аналогично, $\triangle A_1B_1C_2 \sim \sim \triangle I_bI_aC_2$. Из этих подобий следуют равенства $\frac{I_aB_2}{C_1B_2} = \frac{I_aI_c}{A_1C_1} = \frac{I_aI_b}{A_1B_1} = \frac{I_aC_2}{B_1C_2}$. Заметим, что точки B_1 и C_1 симметричны относительно прямой AI_a; поскольку $\frac{I_aB_2}{C_1B_2} = \frac{I_aC_2}{B_1C_2}$, точки B_2 и C_2

также симметричны относительно неё, и $IB_2 = IC_2$. Аналогично получаем $IA_2 = IB_2 = IC_2$, что и требовалось доказать.

10.8. На плоскости нарисован квадрат, стороны которого горизонтальны и вертикальны. В нём проведены несколько отрезков, параллельных сторонам, причем никакие два отрезка не лежат на одной прямой и не пересекаются по точке, внутренней для обоих отрезков. Оказалось, что отрезки разбили квадрат на прямоугольники, причём любая вертикальная прямая, пересекающая квадрат и не содержащая отрезков разбиения, пересекает ровно k прямоугольников разбиения, а любая горизонтальная прямая, пересекающая квадрат и не содержащая отрезков разбиения — ровно ℓ прямоугольников. Каким могло оказаться количество прямоугольников разбиения? (*И. Богданов, Д. Фон-Дер-Флаасс*)

Ответ. $k\ell$.

Первое решение. Возьмём горизонтальную прямую h, проходящую через верхнюю сторону квадрата, и будем двигать её вниз. Рассмотрим момент, когда она проходит через какой-нибудь отрезок разбиения I (по условию, такой отрезок в этот момент только один; пусть к нему прилегают a прямоугольников сверху и b снизу). Количество прямоугольников, которые пересекает h, в этот момент уменьшается на a и увеличивается на b; поскольку оно не должно изменяться, получаем, что $a = b$.

Докажем теперь, что количество прямоугольников равно $k\ell$, индукцией по k. Если $k = 1$, утверждение очевидно. Пусть теперь $k > 1$. Рассмотрим все прямоугольники разбиения, прилегающие к нижней стороне квадрата; их ℓ штук, ибо горизонтальная прямая, проходящая достаточно близко к этой стороне, пересекает ровно их. Разобьём их на группы стоящих подряд прямоугольников равной высоты (см. рис. 6). У каждой такой группы верхней границей является один отрезок.

Рассмотрим одну такую группу с верхним отрезком I. Заметим, что вертикальные отрезки, ограничивающие эту группу, продолжаются выше, чем I. Действительно, иначе, скажем, верхний конец левого вертикального отрезка J лежит на I; тогда справа к J примыкает один прямоугольник, а слева — больше одного (ибо J граничный для группы). Это невозможно.

Выкинем эту группу, и «продлим» прямоугольники, лежащие сверху от I, до нижней стороны квадрата. Поскольку сверху и снизу к I прилегало равное количество прямоугольников, любая горизонтальная прямая по-прежнему будет пересекать ℓ прямоугольников.

Проделаем эту операцию с каждой группой (см. рис. 7). Мы выкинем ровно ℓ прямоугольников; при этом каждая вертикальная прямая будет пересекать на один прямоугольник меньше, нежели раньше, то есть $k-1$ прямоугольник. По предположению индукции, общее количество прямоугольников станет равно $(k-1)\ell$, а значит, до перестройки оно было равно $(k-1)\ell+\ell = k\ell$, что и требовалось доказать.

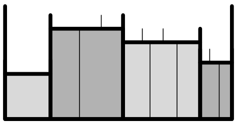


Рис. 6

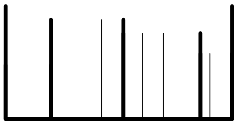


Рис. 7

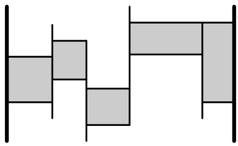


Рис. 8

Второе решение. Рассмотрим любой прямоугольник разбиения P и пересекающую его вертикальную прямую v (не содержащую отрезка разбиения). Пусть v пересекает $i-1$ прямоугольников разбиения, лежащих выше P; в этом случае будем говорить, что P имеет *вертикальный номер* i на прямой v. Аналогично определим *горизонтальный номер* прямоугольника P на горизонтальной прямой, пересекающей его.

Рассмотрим некоторый горизонтальный отрезок разбиения I и будем двигать вертикальную прямую v, пересекающую I, слева направо. Рассмотрим момент, когда v содержит какой-то отрезок разбиения (лежащий выше или ниже I). Как показано в начале предыдущего решения, слева и справа к этому отрезку примыкает одинаковое количество прямоугольников. Значит, вертикальный номер любого прямоугольника P, примыкающего к I, в этот момент не меняется; более того, номера соседних прямоугольников, прилегающих к I с одной стороны, равны, а для прилегающих с разных сторон он отличается на 1. Итак, любой прямоугольник P имеет один и тот же номер на всех вертикальных прямых, его содержащих. Аналогичные утверждения верны и для горизонтальных номеров.

Зафиксируем теперь число i и рассмотрим все прямоугольники $P_1, \ldots, P_x$, имеющие вертикальный номер i (пусть они занумерованы согласно абсциссам их левых границ слева направо). Будем двигать вертикальную прямую v от левой стороны квадрата к правой. В каждый момент (кроме тех, когда она содержит отрезок разбиения) v пересекает ровно один из прямоугольников P_s; значит, правая сторона очередного прямоугольника P_s лежит на той же прямой, что и левая сторона следующего прямоугольника P_{s+1} (см. рис. 8). Тогда эти прямоугольники примыкают с разных сторон к одному и тому же вертикальному отрезку разбиения, поэтому горизонтальный номер прямоугольника P_{s+1} на 1 больше, чем горизонтальный номер P_s. Ясно, наконец, что горизонтальные номера прямоугольников P_1 и P_x равны 1 и ℓ; значит, $x = \ell$.

Итак, для каждого из k вертикальных номеров есть ровно ℓ прямоугольников с таким номером; поэтому общее число прямоугольников равно $k\ell$.

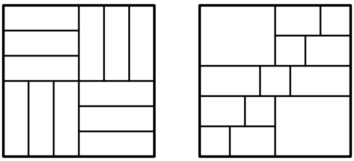


Рис. 9

Замечание. Условия, наложенные на отрезки разбиения, существенны, как показывают примеры на рис. 9.

11 класс

11.5. Из целых чисел от 0 до 1000 выбрали 101 число. Докажите, что среди модулей их попарных разностей есть десять различных чисел, не превосходящих 100. (*И. Богданов*)

Решение. Пусть $a_0 < a_1 < \ldots < a_{100}$ — выбранные числа, упорядоченные по возрастанию. Сумма десяти разностей $a_{10} - a_0, a_{20} - a_{10}, \ldots, a_{100} - a_{90}$ равна $a_{100} - a_0 \leqslant 1000$, поэтому одна из этих разностей не превосходит 100. Пусть это разность $a_{10i+10} - a_{10i}$; тогда

$$0 < a_{10i+1} - a_{10i} < a_{10i+2} - a_{10i} < \ldots < a_{10i+10} - a_{10i} \leqslant 100,$$

и мы предъявили 10 требуемых разностей.

Замечание. Если выбрать из чисел от 0 до 1000 все числа, делящиеся на 10, то среди модулей их попарных разностей не найдётся десяти различных, не превосходящих 99.

11.6. Положительные числа a, b, c и d удовлетворяют условию $2(a + b + c + d) \geqslant abcd$. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant abcd$. (*А. Храбров*)

Решение. Возможны два случая.

Случай 1. Предположим, что $abcd \geqslant 16$. Тогда по неравенству между средними квадратичным и арифметическим имеем

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant 4\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2 \geqslant \geqslant 4\left(\frac{abcd}{8}\right)^2 = \frac{(abcd)^2}{16} \geqslant abcd,$$

что и требовалось доказать.

Случай 2. Пусть теперь $abcd < 16$. Тогда по неравенству между средними арифметическим и геометрическим имеем

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant 4\sqrt[4]{a^2b^2c^2d^2} = \sqrt{16abcd} > \sqrt{a^2b^2c^2d^2} = abcd,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Утверждение задачи остаётся верным для произвольных (не обязательно положительных) действительных чисел a, b, c, d.

11.7. Глава Монетного двора хочет выпустить монеты 12 номиналов (каждый — в натуральное число рублей) так, чтобы любую сумму от 1 до 6543 рублей можно было заплатить без сдачи, используя не более 8 монет. Сможет ли он это сделать? (При уплате суммы можно использовать несколько монет одного номинала.)

(*О. Подлипский*)

Ответ. Сможет.

Решение. Заметим, что $9^4 = 6561 > 6543$. Покажем, что можно выбрать 12 номиналов так, чтобы с помощью не более чем 8 монет можно было уплатить без сдачи любую сумму от 1 до 6560 рублей.

Покажем сначала, как выпустить монеты трёх номиналов, чтобы с помощью не более чем двух монет можно было уплатить без сдачи любую сумму от 1 до 8 рублей. Пусть номиналы равняются 1, 3 и 4 рублям. Тогда $1 = 1$, $2 = 1 + 1$, $3 = 3$, $4 = 4$, $5 = 4 + 1$, $6 = 3 + 3$, $7 = 4 + 3$ и $8 = 4 + 4$.

Пусть теперь Монетный двор изготовит монеты с номиналами 9^k, $3 \cdot 9^k$ и $4 \cdot 9^k$ рублей при $k = 0, 1, 2, 3$. Любое число N от 1 до 6560 единственным образом представляется в виде $N = a_3 \cdot 9^3 + a_2 \cdot 9^2 + a_1 \cdot 9 + a_0$, где числа a_k могут принимать значения от 0 до 8. (Фактически, это разложение числа N в девятеричной системе счисления.) Как показано выше, сумма $a_k \cdot 9^k$ может быть получена не более чем двумя монетами. Таким образом, вся сумма N может быть получена не более чем $4 \cdot 2 = 8$ монетами указанных номиналов, что и требовалось.

11.8. В треугольник ABC вписана окружность ω с центром в точке I. Около треугольника AIB описана окружность Γ. Окружности ω и Γ пересекаются в точках X и Y. Общие касательные к окружностям ω и Γ пересекаются в точке Z. Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABC и XYZ, касаются. (*С. Ильясов*)

Решение. Обозначим окружность, описанную около треугольника ABC, через Ω. Пусть биссектриса CI пересекает Ω повторно в точке S. Тогда, как известно, $SA = SB = SI$, то есть точка S — центр окружности Γ. Из симметрии, точка Z лежит на прямой SC.

Пусть общие касательные к окружностям ω и Γ касаются Γ в точках M и N (см. рис. 10). Линия центров SI яв-

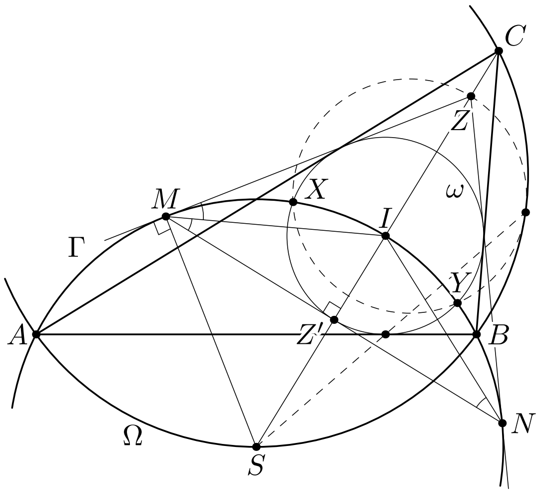


Рис. 10

ляется серединным перпендикуляром к отрезку MN, поэтому $\angle IMN = \angle INM = \angle IMZ$ (последнее равенство верно, поскольку прямая MZ касается Γ). Значит, MI — биссектриса угла ZMN, то есть расстояния от I до ZM и MN равны. Поскольку ω касается ZM, она также касается прямой MN в некоторой точке Z'; из симметрии, эта точка лежит на SI.

Прямоугольные треугольники $SZ'M$ и SMZ подобны, поэтому $SZ \cdot SZ' = SM^2$. Это означает, что при инверсии относительно окружности Γ точка Z' перейдет в точку Z. Значит, окружность ω, содержащая точки X, Y и Z', перейдёт в окружность, описанную около треугольника XYZ. Далее, при такой инверсии прямая AB переходит в окружность Ω. Поскольку ω и AB касаются, их образы также будут касаться, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Тот факт, что окружность, описанная около XYZ, переходит в ω при инверсии относительно Γ, можно доказать и по-другому. Обозначим через r и ρ радиусы окружностей ω и Γ; пусть Z' — точка пересечения отрезка IS с ω. Тогда $SZ' = \rho - r$. С другой стороны, из гомотетии с центром в Z, переводящей ω в Γ, имеем $\frac{r}{\rho} = \frac{ZI}{ZS} = 1 - \frac{\rho}{ZS}$, откуда $SZ = \frac{\rho^2}{\rho - r}$. Значит, $SZ \cdot SZ' = \rho^2$.

Замечание 2. Другое решение можно получить, сделав инверсию относительно окружности ω. При этой инверсии: точки A, B, C переходят в середины A'', B'', C'' сторон $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ треугольника с вершинами в точках касания ω со сторонами; окружность Γ переходит в прямую XY, которая содержит среднюю линию $A''B''$ треугольника $A'B'C'$; описанная окружность треугольника XYZ переходит в окружность ω', симметричную ω относительно XY. Значит, надо доказать, что ω' касается окружности, описанной около треугольника $A''B''C''$. А это верно, поскольку при симметрии относительно XY последняя окружность переходит в окружность, описанную около $A''B''C'$, которая касается ω.