Материалы для проведения регионального этапа

XXXIX ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2012–2013 учебный год

Второй день

26–27 января 2013 г.

Москва, 2013

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XXXIX Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической Комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н.Х. Агаханов, С.Н. Агаханов, А.В. Акопян, А.В. Антропов, И.И. Богданов, С.Г. Волчёнков, Р.А. Гимадеев, А.Ю. Головко, М.А. Григорьев, С.Г. Григорьев, О.Ю. Дмитриев, Л.А. Емельянов, Р.Г. Женодаров, Л.Н. Исхаков, П.А. Кожевников, Д.О. Лазарев, М.С. Миронов, П.А. Мищенко, Е.Г. Молчанов, А.М. Останин, О.К. Подлипский, А.А. Полянский, И.С. Рубанов, М.Б. Скопенков, Б.В. Трушин, А.И. Храбров, Д.Г. Храмцов, К.В. Чувилин, В.А. Шмаров.

В скобках после каждой задачи указана фамилия ее автора.

Компьютерный макет: И.И. Богданов.

Методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2012–2013 учебного года.

Олимпиада проводится в два дня (тура) — 26 и 27 января 2013 года. Задания каждого тура содержат по 4 задачи для каждого класса. Каждый тур олимпиады длится 4 часа.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 56 (28 — I тур, 28 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части — решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что текст решения слишком длинный, или за то, что верное решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Ниже приведены ответы и решения задач олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.5. Ненулевые числа a и b таковы, что уравнение
$$a(x-a)^2+b(x-b)^2=0$$
имеет единственное решение. Докажите, что $|a|=|b|$.

(*Н. Агаханов*)

Первое решение. Пусть $|b|\neq|a|$. Тогда $b+a\neq 0$, и данное уравнение — квадратное: $(a+b)x^2-2(a^2+b^2)x+(a^3+b^3)=0$. При этом его дискриминант $\frac{D}{4}=(a^2+b^2)^2-(a+b)(a^3+b^3)=-ab(a-b)^2$ не равен нулю, так как a, b — ненулевые, и $a-b\neq 0$. Значит, уравнение не может иметь ровно одно решение. Противоречие.

Замечание. Заметим, что при $b=-a$ данное уравнение — линейное: $-4a^2x=0$, и оно имеет единственное решение $x=0$. Если же $a=b$, то дискриминант обращается в ноль, и у уравнения также ровно одно решение.

Второе решение. Пусть числа a и b одного знака. Если они оба — положительные, то $a(x-a)^2\geqslant 0$ и $b(x-b)^2\geqslant 0$, откуда следует, что равенство $a(x-a)^2+b(x-b)^2=0$ может выполняться только в случае, когда одновременно выполняются равенства $a(x-a)^2=0$ и $b(x-b)^2=0$, то есть $x=a$ и $x=b$, откуда $a=b$. Аналогично рассматривается случай, когда оба числа — отрицательные (знаки неравенств меняются на противоположные).

Пусть теперь числа имеют разные знаки; без ограничения общности, $a>0$ и $b<0$. Тогда можно положить $a=c^2$, $b=-d^2$, где $c>0$ и $d>0$. Воспользовавшись формулой разности квадратов, преобразуем данное уравнение: $0=a(x-a)^2+b(x-b)^2=c^2(x-a)^2-d^2(x-b)^2=(c(x-a)-d(x-b))(c(x-a)+d(x-b))$. Если $c\neq d$, полученное уравнение имеет два различных корня $x_1=\frac{ac-bd}{c-d}=\frac{c^3+d^3}{c-d}$ и $x_2=\frac{ac+bd}{c+d}=\frac{c^3-d^3}{c+d}$ (заметим, что $|x_2|<|x_1|$, поскольку $|c^3+d^3|>|c^3-d^3|$ и $|c-d|<|c+d|$). Значит, чтобы выполнялось условие задачи, необходимо равенство $c=d$, из которого и следует, что $b=-a$.

Комментарий. Из рассмотрения дискриминантов получено равенство $a = b$ (при этом потерян случай $a = -b$, когда уравнение не квадратное) — 3 балла.

При исследовании знаков a и b верно разобран только случай, когда числа a и b одного знака — 2 балла.

При исследовании знаков a и b верно разобран только случай, когда числа a и b разного знака — 4 балла.

9.6. Тридцать девочек — 13 в красных платьях и 17 в синих платьях — водили хоровод вокруг новогодней ёлки. Впоследствии каждую из них спросили, была ли её соседка справа в синем платье. Оказалось, что правильно ответили те и только те девочки, которые стояли между девочками в платьях одного цвета. Сколько девочек могли ответить утвердительно?

(*Р. Женодаров*)

Ответ. 17.

Решение. Рассмотрим любую девочку. Цвета платьев её соседок слева и справа могли быть такими: синий–синий, синий–красный, красный–синий, красный–красный. Девочка ответила «да» ровно в первых двух случаях; значит, она сказала «да» ровно в том случае, когда её соседка *слева* была в синем платье.

Итак, поскольку ровно у 17 девочек соседка слева была в синем платье, то и ответ «да» прозвучал 17 раз.

Замечание. Имеются другие (более сложные) обоснования того, что в хороводе ровно 17 девочек, ответивших «да».

Комментарий. Только ответ (без обоснования, либо полученный рассмотрением частных случаев расстановки) — 1 балл.

За попытки обоснования, в которых рассмотрены не все варианты расположения девочек, дополнительные баллы не начисляются.

9.7. Серединный перпендикуляр к стороне AC остроугольного треугольника ABC пересекает прямые AB и BC в точках B_1 и B_2 соответственно, а серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает прямые AC и BC в точках C_1 и C_2 соответственно. Окружности, описанные около треугольников BB_1B_2 и CC_1C_2 пересекаются в точках P и Q. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на прямой PQ.

(*Л. Емельянов*)

Решение. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Покажем сначала, что прямая OB касается окружности ω_b, описанной около треугольника BB_1B_2.

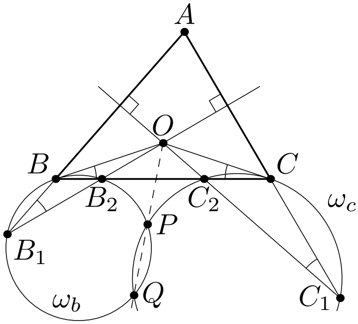


Рис. 1

Пусть $AB < BC$; тогда серединный перпендикуляр к стороне AC пересекает сторону BC в точке B_2, а продолжение стороны AB за точку B — в точке B_1 (см. рис. 1). Имеем $\angle B_2B_1A = \angle OB_1A = 90^\circ - \angle A$. С другой стороны, из равнобедренного треугольника BOC получаем $\angle B_2BO = \angle CBO = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BOC = 90^\circ - \angle A$. Таким образом, вписанный угол $\angle B_2B_1B$ равен углу между секущей BB_2 и прямой OB. Из обратной теоремы об угле между касательной и секущей следует, что OB касается ω_b. Если $AB < BC$, то проходит то же рассуждение с заменой точки A на C и наоборот.

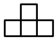
Аналогично, прямая OC касается окружности ω_c, описанной около треугольника CC_1C_2. Теперь несложно доказать, что прямая OP проходит через Q. Допустим, что это не так, и прямая OP пересекает ω_b и ω_c в различных точках Q_b и Q_c. Тогда по теореме о произведении отрезков секущих имеем $OQ_b \cdot OP = OB^2 = OC^2 = OQ_c \cdot OP$, откуда $OQ_b = OQ_c$; наконец, поскольку точки Q_b и Q_c лежат по ту же сторону от O, что и P, получаем $Q_b = Q_c$, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Для неостроугольного треугольника утверждение задачи также верно. Заметим, однако, что окружности, описанные около треугольников B_1B_2B и C_1C_2C не всегда пересекаются (даже в остроугольном треугольнике). В этом случае утверждение задачи сохранит силу, если заменить заменить прямую PQ на радикальную ось окружностей ω_b и ω_c.

Замечание 2. Нетрудно также показать, что на прямой PQ (или на радикальной оси ω_b и ω_c) лежит вершина A.

Комментарий. Доказано, что прямая OB касается ω_b (или что прямая OC касается ω_c) — 3 балла.

Доказано, что $OB_1 \cdot OB_2 = OC_1 \cdot OC_2$, дальнейшее продвижение отсутствует — 4 балла.

9.8. В клетках доски 8×8 расставлены числа 1 и -1 (в каждой клетке — по одному числу). Рассмотрим всевозможные расположения фигурки  на доске (фигурку можно поворачивать, но её клетки не должны выходить за пределы доски). Назовём такое расположение *неудачным*, если сумма чисел, стоящих в четырёх клетках фигурки, не равна 0. Найдите наименьшее возможное число неудачных расположений. (*М. Антипов*)

Ответ. 36.

Решение. Покажем, что в каждом «кресте» из пяти клеток доски найдётся хотя бы одно неудачное расположение. Предположим противное; пусть в крайних клетках креста стоят числа a, b, c, d, а в центральной — e; обозначим через S сумму всех этих пяти чисел. Тогда по нашему предположению $S - a = S - b = S - c = S - d = 0$, откуда $a = b = c = d$. Значит, $S - a = e + 3a = 0$, то есть $e = -3a = \pm 3$, что невозможно.

−	+	−	+	−	+	−	+
−	+	−	+	−	+	−	+
+	−	+	−	+	−	+	−
+	−	+	−	+	−	+	−
−	+	−	+	−	+	−	+
−	+	−	+	−	+	−	+
+	−	+	−	+	−	+	−
+	−	+	−	+	−	+	−

Рис. 2

Итак, в каждом из 36 «крестов» (с центрами во всех некрайних клетках) есть неудачное расположение фигурки. Ясно, что каждое расположение содержится не более, чем в одном кресте; поэтому таких расположений не меньше 36.

С другой стороны, на рис. 2 показан пример расстановки, при которой количество неудачных расположений равно 36 (в каждой клетке указан знак соответствующего числа). Действительно, в любом кресте неудачное расположение ровно одно, а все расположения, прилегающие длинной стороной к границе доски — удачны.

Комментарий. Только ответ без обоснования — 0 баллов.

Приведён только пример ровно с 36 неудачными расположениями — 2 балла.

Доказано только, что расположений должно быть не меньше 36, но соответствующий пример отсутствует (или неверен) — 4 балла.

Доказано, что хотя бы одно из четырёх расположений фигурки в «кресте» неудачно — 2 балла. (Эти 2 балла могут суммироваться с баллами за верный пример.)

10 класс

10.5. Тридцать девочек — 13 в красных платьях и 17 в синих платьях — водили хоровод вокруг новогодней ёлки. Впоследствии каждую из них спросили, была ли её соседка справа в синем платье. Оказалось, что правильно ответили те и только те девочки, которые стояли между девочками в платьях одного цвета. Сколько девочек могли ответить утвердительно?

(*Р. Женодаров*)

Ответ. 17.

Решение. Рассмотрим любую девочку. Цвета платьев её соседок слева и справа могли быть такими: синий–синий, синий–красный, красный–синий, красный–красный. Девочка ответила «да» ровно в первых двух случаях; значит, она сказала «да» ровно в том случае, когда её соседка *слева* была в синем платье.

Итак, поскольку ровно у 17 девочек соседка слева была в синем платье, то и ответ «да» прозвучал 17 раз.

Замечание. Имеются другие (более сложные) обоснования того, что в хороводе ровно 17 девочек, ответивших «да».

Комментарий. Только ответ (без обоснования, либо полученный рассмотрением частных случаев расстановки) — 1 балл.

За попытки обоснования, в которых рассмотрены не все варианты расположения девочек, дополнительные баллы не начисляются.

10.6. Натуральные числа a, b и c, где $c \geqslant 2$, таковы, что $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c}$. Докажите, что хотя бы одно из чисел $a + c$, $b + c$ — составное.

(*В. Сендеров*)

Решение. Достаточно показать, что хотя бы одно из двух чисел $d_a = \text{НОД}(a, c)$ и $d_b = \text{НОД}(b, c)$ больше 1. Действительно, если, например, $d_a > 1$, то $a+c$ делится на d_a и $a+c > d_a$, значит, $a + c$ — составное число.

Из равенства $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c}$ следует $c(a + b) = ab$, значит, ab делится на c. Но тогда, если $d_a = d_b = 1$, то и $c = 1$, что невозможно по условию. Итак, одно из чисел d_a и d_b больше 1, что и требовалось доказать.

Замечание. Отметим, что если натуральные a, b, c удовлетворяют равенству $1/a + 1/b = 1/c$, то число $a + b$ также составное.

Комментарий. Доказано, что одно из чисел d_a и d_b больше единицы — 5 баллов.

Если задача сведена к утверждению, что одно из чисел d_a и d_b больше единицы, но само это утверждение не доказано — 2 балла.

10.7. К двум непересекающимся окружностям ω_1 и ω_2 проведены три общие касательные — две внешние, a и b, и одна внутренняя, c. Прямые a, b и c касаются окружности ω_1 в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно, а окружности ω_2 — в точках A_2, B_2 и C_2 соответственно. Докажите, что отношение площадей треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равно отношению радиусов окружностей ω_1 и ω_2. (*Л. Емельянов*)

Решение. Пусть r_1 и r_2 — радиусы окружностей ω_1 и ω_2 соответственно, а O_1 и O_2 — их центры. Если $r_1 = r_2$, то треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ симметричны относительно точки пересечения прямых O_1O_2 и C_1C_2, и их площади равны.

Предположим, что $r_1 \neq r_2$; пусть для определенности $r_1 < r_2$. Тогда лучи A_2A_1 и B_2B_1 пересекаются в некоторой точке S. Обозначим через P и Q точки пересечения прямой c с прямыми a и b соответственно. Мы докажем, что 1) $\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{r_1}{r_2}$, и 2) высоты h_1 и h_2 треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, проведённые из вершин C_1 и C_2 соответственно, равны. Отсюда будет следовать, что $\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{A_2B_2C_2}} = \frac{A_1B_1 \cdot h_1/2}{A_2B_2 \cdot h_2/2} = \frac{r_1}{r_2}$, что и требуется.

1) Прямоугольные треугольники SA_1O_1 и SA_2O_2 подобны, значит, $\frac{SA_1}{SA_2} = \frac{r_1}{r_2}$. Следовательно, равнобедренные треугольники SA_1B_1 и SA_2B_2 подобны с коэффициентом r_1/r_2, откуда и следует нужное утверждение.

2) Обозначим проекции точек B_1, C_1, B_2, C_2, P и Q на линию центров O_1O_2 через B_1', C_1', B_2', C_2', P' и Q' соответственно (проекциями точек A_1 и A_2 на O_1O_2 также являются B_1' и B_2').

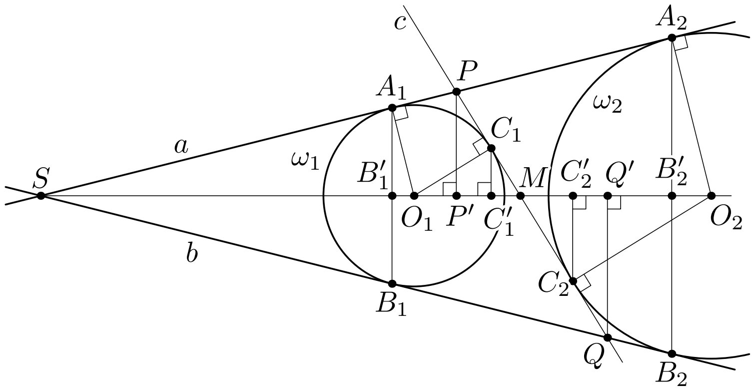


Рис. 3

Заметим, что длины отрезков $B_1'C_1'$ и $B_2'C_2'$ равны h_1 и h_2 соответственно.

Из равенства отрезков касательных к ω_1 имеем $SP + PQ - SQ = (SA_1 + PA_1) + (PC_1 + QC_1) - (SB_1 + QB_1) = 2PA_1 = 2PC_1$. Аналогично, из равенства отрезков касательных к ω_2 получаем $SP+PQ-SQ = (SA_2 - PA_2) + (PC_2 + QC_2) - (SB_2 - QB_2) = 2QB_2 = 2QC_2$. Отсюда следует, что $PA_1 = PC_1 = QB_2 = QC_2$.

Пусть прямая c пересекает O_1O_2 в точке M. Положим $\alpha = \angle PSM = \angle QSM$, $\beta = \angle SMP = \angle O_2MQ$. Имеем $B_1'C_1' = B_1'P' + P'C_1' = A_1P\cos\alpha + PC_1\cos\beta = B_2Q\cos\alpha + QC_2\cos\beta = B_2'Q' + Q'C_2' = B_2'C_2'$, то есть $B_1'C_1' = B_2'C_2'$, что и требовалось.

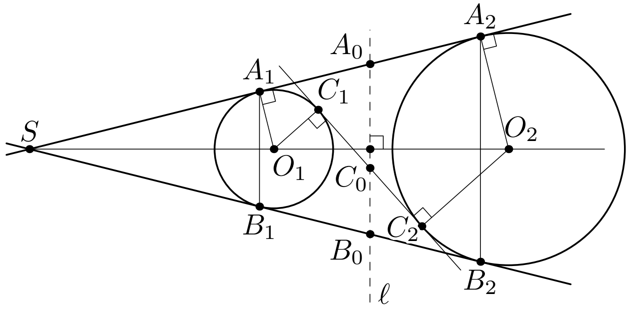


Рис. 4

Замечание. При доказательстве части 1) можно воспользоваться гомотетией с центром в точке S.

Часть 2) можно доказывать и по-другому. Достаточно доказать, что середины A_0, B_0 и C_0 отрезков A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 лежат на одной прямой ℓ (эта прямая называется *радикальной осью окружностей* ω_1 *и* ω_2, см. рис. 4). Действительно, тогда $\ell \perp O_1O_2$, и точки B_1', C_1' будут симметричны соответственно точкам B_2' и C_2' относительно ℓ, откуда сразу следует $B_1'C_1' = B_2'C_2'$.

Условие $A_0C_0 \perp O_1O_2$ равносильно равенству $O_1A_0^2 - O_2A_0^2 = O_1C_0^2 - O_2C_0^2$, или $(r_1^2 + A_1A_0^2) - (r_2^2 + A_2A_0^2) = (r_1^2 + C_1C_0^2) - (r_2^2 + C_2C_0^2)$. Последнее равенство верно, так как $A_1A_0 = A_2A_0$ и $C_1C_0 = C_2C_0$. Аналогично $B_0C_0 \perp O_1O_2$, что и означает, что A_0, B_0 и C_0 лежат на одной прямой, перпендикулярной O_1O_2.

Комментарий. Доказана только часть 1) — 2 балла.

Доказана только часть 2) — 4 балла.

За отсутствие рассмотрения случая $r_1 = r_2$ баллы не снимаются.

Если в работе сформулированы и используются известные свойства радикальной оси, оценка не снижается.

Тот факт, что $PC_1 = QC_2$ (или аналогичные равенства отрезков), может быть сформулирован, но не доказан в работе. Поскольку это известная теорема, за отсутствие в работе этого доказательства баллы не снижаются.

Только доказано равенство $PC_1 = QC_2$ (или аналогичные) — 0 баллов (так как это известная теорема).

10.8. На окружности длины 2013 отмечены 2013 точек, делящих её на равные дуги. В каждой отмеченной точке стоит фишка. Назовём *расстоянием* между двумя точками длину меньшей дуги между этими точками. При каком наибольшем n можно переставить фишки так, чтобы снова в каждой отмеченной точке было по фишке, а расстояние между любыми двумя фишками, изначально удалёнными не более, чем на n, увеличилось?

(*Д. Храмцов*)

Ответ. $n = 670$.

Решение. Занумеруем точки и стоящие на них фишки по часовой стрелке последовательными неотрицательными целыми числами от 0 до 2012. Рассмотрим произвольную перестановку и фишки с номерами 0, 671 и 1342, изначально расположенные в вершинах правильного треугольника. Попарные расстояния между ними равны 671. После перестановки сумма попарных расстояний между этими фишками не будет превосходить длины окружности, а значит, расстояние между какими-то двумя не будет превосходить $2013/3 = 671$; значит, расстояние между этими двумя фишками не увеличится. Итак, при $n \geqslant 671$ требуемая перестановка невозможна.

Приведём теперь пример искомой перестановки для $n = 670$. Каждую фишку с номером $i \leqslant 1006$ переставим точку с номером $a_i = 2i$, а каждую фишку с номером $i \geqslant 1007$ — в точку с номером $a_i = 2i - 2013$. Иначе говоря, a_i — это остаток от деления $2i$ на 2013. Нетрудно понять, что в каждую точку попало по фишке. Осталось показать, что расстояния между парами фишек, изначально удалённых друг от друга не более, чем на 670, при этом возрастут.

Рассмотрим произвольные фишки с номерами i и j; пусть расстояние между ними равно $d \leqslant 670$. Тогда одна из дуг между точками a_i и a_j будет иметь длину $2d$, то есть расстояние между этими точками есть $d' = \min\{2d, 2013 - 2d\}$. Но заметим, что $2d > d$ и $2013 - 2d > d$ (последнее — поскольку $3d < 2013$). Значит, и $d' > d$, что и требовалось доказать.

Комментарий. Только верный ответ без обоснований — 0 баллов.

Доказано, что при $n \geqslant 671$ требуемая расстановка не существует (сделана оценка) — 3 балла.

Приведен пример, показывающий, что $n = 670$ подходит, с обоснованием, что пример удовлетворяет условию — 4 балла.

Приведен верный пример, показывающий, что $n = 670$ подходит, без достаточного обоснования того, что пример удовлетворяет условию — 3 балла.

Баллы за продвижения в доказательстве оценки и в построении примера суммируются.

11 класс

11.5. Существуют ли такие 2013 различных натуральных чисел, что сумма любых 2012 из них не меньше квадрата оставшегося?

(*О. Подлипский*)

Ответ. Не существуют.

Решение. Предположим, что такие числа нашлись. Поскольку они различны и их 2013, наибольшее из них не меньше 2013; обозначим его через a. Тогда сумма всех остальных не превосходит $2012a$, а его квадрат равен $a^2 \geqslant 2013a$, то есть он больше этой суммы. Противоречие.

Комментарий. Рассмотрено максимальное из чисел и замечено, что оно не меньше 2013 — 2 балла.

11.6. Три попарно непересекающиеся окружности ω_x, ω_y, ω_z радиусов r_x, r_y, r_z соответственно лежат по одну сторону от прямой t и касаются ее в точках X, Y, Z соответственно. Известно, что Y — середина отрезка XZ, $r_x = r_z = r$, а $r_y > r$. Пусть p — одна из общих внутренних касательных к окружностям ω_x и ω_y, а q — одна из общих внутренних касательных к окружностям ω_y и ω_z. В пересечении прямых p, q, t образовался неравнобедренный треугольник. Докажите, что радиус вписанной в него окружности равен r.

(*П. Кожевников*)

Первое решение. Обозначим вершины данного треугольника через A, B, C, как показано на рис. 5. Пусть q' — вторая общая внутренняя касательная к ω_y и ω_z, а t' — вторая их общая внешняя касательная. Обозначим через A' и B' точки пересечения прямой t' с q и t соответственно, а через M и N — точки пересечения прямой q' с t и t' соответственно. Обозначим также центры окружностей ω_x, ω_y и ω_z через I_x, I_y и I_z соответственно.

Прямая p при симметрии относительно прямой I_yY переходит либо в q, либо в q'. Но, если она переходит в q, то треугольник ABC равнобедренный. Значит, p и q' симметричны относительно I_yY. С другой стороны, прямые q и q', а также t и t' симметричны относительно линии центров I_yI_z. Значит, $\angle B'A'C = \angle NMB' = \angle BAC$. Кроме того, $\angle ACB = \angle A'CB'$

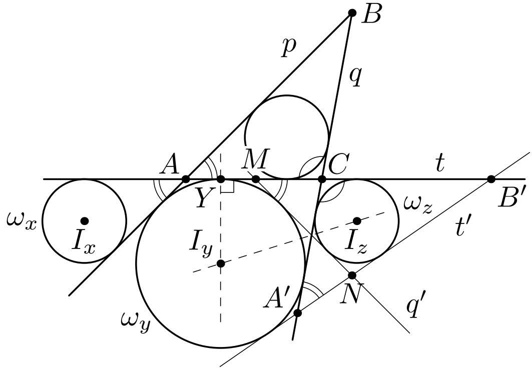


Рис. 5

как вертикальные. Итак, треугольники ABC и $A'B'C$ подобны по двум углам.

Наконец, ω_y — их общая вневписанная окружность, касающаяся соответственных сторон AC и $A'C$; значит, коэффициент их подобия равен 1, и эти треугольники равны. Поэтому радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABC и $A'B'C$, также равны. Но окружность, вписанная в $A'B'C$ — это ω_z, откуда и следует требуемое.

Замечание. Вариацией рассуждения, приведённого выше, можно показать, что треугольники ABC и $A'B'C$ симметричны относительно прямой CI_y.

Второе решение. Опять обозначим вершины данного треугольника A, B, C, как показано на рис. 6. Пусть ω_0 — вписанная окружность треугольника ABC, и ее радиус равен $r_0 = r/k$ (тем самым, в задаче требуется доказать, что $k = 1$). Обозначим через P, Q и T точки касания ω_0 с прямыми p, q и t соответственно, а через K и L — точки касания ω_y с прямыми p и q соответственно.

Обозначим $x = AT$, $z = CT = AC - x$. Покажем, что $AY = z$. Действительно, из равенства отрезков касательных к окружности и равенства отрезков общих касательных к ω_y и ω_0 имеем: $AY - CT = AK - CQ = (PK - AP) - (QL - CL) = CL - AP = CY - AT = (AC - AY) - (AC - CT) = CT - AY$; то есть $AY - CT = CT - AY$, откуда $AY = CT = z$.

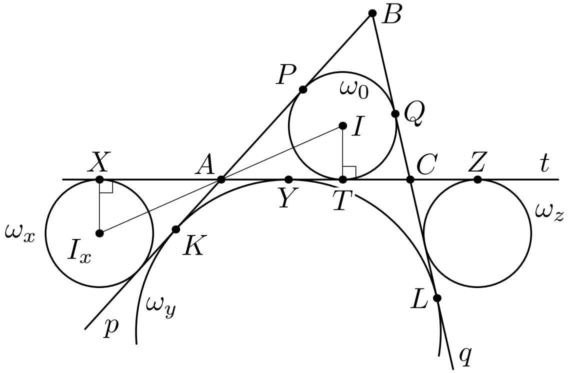


Рис. 6

Заметим, что $x \neq z$. Иначе $AT = AY$, значит, точки Y и T совпадают, а AC касается окружностей ω_y и ω_0 в этой общей точке. В этом случае треугольник ABC симметричен относительно линии центров окружностей ω_y и ω_0, значит, он равнобедренный, что противоречит условию.

Пусть I и I_x — центры окружностей ω_0 и ω_x. Треугольники ITA и I_xXA подобны, поэтому $XA = \frac{I_xX}{IT} \cdot AT = \frac{r}{r_0} \cdot AT = kAT = kx$. Аналогично, $ZC = kz$. Из условия $XY = YZ$ получаем $XA + AY = ZC + CY$; значит, $kx + z = kz + x$, откуда $(kx - x) - (kz - z) = 0$, или $(k-1)(x-z) = 0$. По доказанному $x \neq z$, значит $k = 1$, что и требовалось.

Комментарий. В верном решении используется сокращение на $AY - CY$ (либо на $AT - CT$ или аналогичную величину) без обоснования того факта, что $AY \neq CY$ — снимается 1 балл.

Тот факт, что $AY = CT$, может быть сформулирован, но не доказан в работе. Поскольку это известная теорема, за отсутствие в работе этого доказательства баллы не снижаются.

Только доказано равенство $AY = CT$ (или $AT = CY$) — 0 баллов (так как это известная теорема).

Задача сведена к равенству отрезков $AX = AT$ (или $CT = CZ$), но это равенство не доказано — 2 балла.

11.7. Найдите все натуральные k такие, что при каждом нечётном $n > 100$ число $20^n + 13^n$ делится на k. (*А. Голованов*)

Ответ. $k = 1, 3, 11, 33$.

Первое решение. Заметим сразу, что при любом нечётном n число

$$20^n + 13^n = (20 + 13)(20^{n-1} - 20^{n-2} \cdot 13 + \ldots + 13^{n-1})$$

делится на $20 + 13 = 33$. Значит, если k является делителем числа 33, то условие задачи выполнено.

Покажем, что все остальные k не удовлетворяют условию. Предположим противное; тогда числа $A = 20^{101} + 13^{101}$ и $B = 20^{103} + 13^{103}$ делятся на k. Значит, числа $20^2 \cdot A - B = (400 - 169) \cdot 13^{101} = 231 \cdot 13^{101}$ и $B - 13^2 \cdot A = 231 \cdot 20^{101}$ также делятся на k. Однако НОД$(231 \cdot 20^{101}, 231 \cdot 13^{101}) = 231 = 7 \cdot 33$, так что $231 \,\vdots\, k$.

Наконец, покажем, что $20^n + 13^n$ не делится на 7. Действительно,

$$20^n + 13^n = (20^n - 13^n) + 2 \cdot 13^n,$$

где первое слагаемое делится на $20 - 13 = 7$, а второе — нет. Итак, k является делителем числа 231 и не делится на 7; значит, $33 \,\vdots\, k$, что и требовалось доказать.

Второе решение. Предъявим другое доказательство того, что k должно быть делителем числа 33.

Заметим сначала, что НОД$(20, k) = 1$. Действительно, если НОД$(20, k) \,\vdots\, p$ при некотором простом p, то и $20^{101} + 13^{101} \,\vdots\, p$, а значит, и $13 \,\vdots\, p$. Но тогда на p делится НОД$(20, 13) = 1$, что невозможно. Аналогично, НОД$(13, k) = 1$.

Рассмотрим теперь числа $1 = 20^0$, 20^1, 20^2, …, 20^k; два из них дают одинаковые остатки при делении на k. Значит, при некоторых $i > j$ на k делится число $20^i - 20^j = 20^j(20^{i-j} - 1)$. Отсюда, поскольку НОД$(20, k) = 1$, получаем, что при некотором натуральном $u = i - j$ число $20^u - 1$ делится на k. Аналогично, при некотором натуральном v число $13^v - 1$ делится на k.

Рассмотрим теперь число $n > 100$ такое, что $n - 1 \,\vdots\, uv$; например, подходит число $n = 1 + 100uv$. Тогда число

$$(20^n + 13^n) - 33 = 20(20^{n-1} - 1) + 13(13^{n-1} - 1)$$

делится на k, поскольку $20^{n-1} - 1 \,\vdots\, k$ и $13^{n-1} - 1 \,\vdots\, k$. Итак, поскольку $20^n + 13^n \,\vdots\, k$, то и $33 \,\vdots\, k$.

Комментарий. Показано, что все числа 1, 3, 11, 33 удовлетворяют условию — 1 балл.

Показано только, что $231 \vdots k$ — 3 балла. (Если дополнительно доказано, что все делители числа 33 подходят — добавить 1 балл.)

Показано только, что $33 \vdots k$ — 5 баллов.

11.8. Фигура «мамонт» бьёт как слон (по диагоналям), но только в трёх направлениях из четырех (отсутствующее направление может быть разным для разных мамонтов). Какое наибольшее число не бьющих друг друга мамонтов можно расставить на шахматной доске 8×8? (*О. Дмитриев*)

Ответ. 20.

Решение. Из каждого мамонта выпустим три стрелки в тех направлениях, в которых он бьёт. Сопоставим стрелку диагонали (не обязательно главной), если мамонт, из которого ведёт стрелка, стоит в этой диагонали, а стрелка идёт вдоль неё. Тогда каждой диагонали сопоставлено не более двух стрелок: в противном случае две из них будут идти в одном направлении, и один из мамонтов будет бить другого. Поскольку диагоналей всего 30 (по 15 в каждом направлении), стрелок им сопоставлено не более 60, а значит, всего мамонтов не больше $60/3 = 20$.

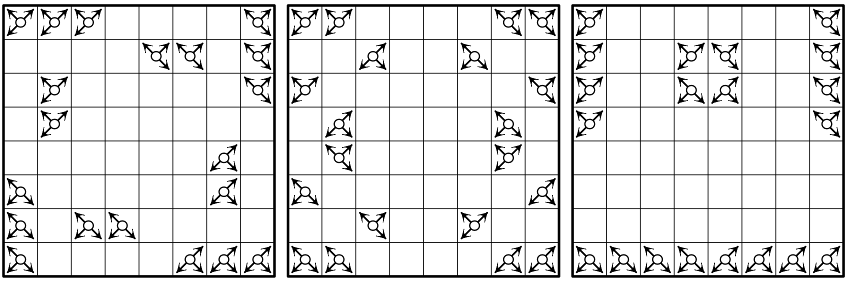


Рис. 7

Три возможных примера расположения 20 мамонтов, не бьющих друг друга, показаны на рис. 7. Есть и другие расположения.

Замечание. Для построения примера достаточно расставить 10 мамонтов на белых полях; расстановка чёрных получится поворотом на 90° или симметрией относительно средней линии доски.

Комментарий. Приведён правильный пример расстановки 20 мамонтов, не бьющих друг друга — 3 балла.

Доказано только, что мамонтов не может быть больше 20 — 4 балла.