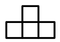
9 класс

Второй день

9.5. Ненулевые числа a и b таковы, что уравнение
$$a(x-a)^2 + b(x-b)^2 = 0$$
имеет единственное решение. Докажите, что $|a| = |b|$.

9.6. Тридцать девочек — 13 в красных платьях и 17 в синих платьях — водили хоровод вокруг новогодней ёлки. Впоследствии каждую из них спросили, была ли её соседка справа в синем платье. Оказалось, что правильно ответили те и только те девочки, которые стояли между девочками в платьях одного цвета. Сколько девочек могли ответить утвердительно?

9.7. Серединный перпендикуляр к стороне AC остроугольного треугольника ABC пересекает прямые AB и BC в точках B_1 и B_2 соответственно, а серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает прямые AC и BC в точках C_1 и C_2 соответственно. Окружности, описанные около треугольников BB_1B_2 и CC_1C_2 пересекаются в точках P и Q. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на прямой PQ.

9.8. В клетках доски 8×8 расставлены числа 1 и -1 (в каждой клетке — по одному числу). Рассмотрим всевозможные расположения фигурки  на доске (фигурку можно поворачивать, но её клетки не должны выходить за пределы доски). Назовём такое расположение *неудачным*, если сумма чисел, стоящих в четырёх клетках фигурки, не равна 0. Найдите наименьшее возможное число неудачных расположений.

XXXIX Всероссийская математическая олимпиада школьников

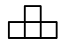
9 класс

Второй день

9.5. Ненулевые числа a и b таковы, что уравнение
$$a(x-a)^2 + b(x-b)^2 = 0$$
имеет единственное решение. Докажите, что $|a| = |b|$.

9.6. Тридцать девочек — 13 в красных платьях и 17 в синих платьях — водили хоровод вокруг новогодней ёлки. Впоследствии каждую из них спросили, была ли её соседка справа в синем платье. Оказалось, что правильно ответили те и только те девочки, которые стояли между девочками в платьях одного цвета. Сколько девочек могли ответить утвердительно?

9.7. Серединный перпендикуляр к стороне AC остроугольного треугольника ABC пересекает прямые AB и BC в точках B_1 и B_2 соответственно, а серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает прямые AC и BC в точках C_1 и C_2 соответственно. Окружности, описанные около треугольников BB_1B_2 и CC_1C_2 пересекаются в точках P и Q. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на прямой PQ.

9.8. В клетках доски 8×8 расставлены числа 1 и -1 (в каждой клетке — по одному числу). Рассмотрим всевозможные расположения фигурки  на доске (фигурку можно поворачивать, но её клетки не должны выходить за пределы доски). Назовём такое расположение *неудачным*, если сумма чисел, стоящих в четырёх клетках фигурки, не равна 0. Найдите наименьшее возможное число неудачных расположений.

10 класс

Второй день

10.5. Тридцать девочек — 13 в красных платьях и 17 в синих платьях — водили хоровод вокруг новогодней ёлки. Впоследствии каждую из них спросили, была ли её соседка справа в синем платье. Оказалось, что правильно ответили те и только те девочки, которые стояли между девочками в платьях одного цвета. Сколько девочек могли ответить утвердительно?

10.6. Натуральные числа a, b и c, где $c \geqslant 2$, таковы, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$. Докажите, что хотя бы одно из чисел $a+c$, $b+c$ — составное.

10.7. К двум непересекающимся окружностям ω_1 и ω_2 проведены три общие касательные — две внешние, a и b, и одна внутренняя, c. Прямые a, b и c касаются окружности ω_1 в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно, а окружности ω_2 — в точках A_2, B_2 и C_2 соответственно. Докажите, что отношение площадей треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равно отношению радиусов окружностей ω_1 и ω_2.

10.8. На окружности длины 2013 отмечены 2013 точек, делящих её на равные дуги. В каждой отмеченной точке стоит фишка. Назовём *расстоянием* между двумя точками длину меньшей дуги между этими точками. При каком наибольшем n можно переставить фишки так, чтобы снова в каждой отмеченной точке было по фишке, а расстояние между любыми двумя фишками, изначально удалёнными не более, чем на n, увеличилось?

XXXIX Всероссийская математическая олимпиада школьников

10 класс

Второй день

10.5. Тридцать девочек — 13 в красных платьях и 17 в синих платьях — водили хоровод вокруг новогодней ёлки. Впоследствии каждую из них спросили, была ли её соседка справа в синем платье. Оказалось, что правильно ответили те и только те девочки, которые стояли между девочками в платьях одного цвета. Сколько девочек могли ответить утвердительно?

10.6. Натуральные числа a, b и c, где $c \geqslant 2$, таковы, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$. Докажите, что хотя бы одно из чисел $a+c$, $b+c$ — составное.

10.7. К двум непересекающимся окружностям ω_1 и ω_2 проведены три общие касательные — две внешние, a и b, и одна внутренняя, c. Прямые a, b и c касаются окружности ω_1 в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно, а окружности ω_2 — в точках A_2, B_2 и C_2 соответственно. Докажите, что отношение площадей треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равно отношению радиусов окружностей ω_1 и ω_2.

10.8. На окружности длины 2013 отмечены 2013 точек, делящих её на равные дуги. В каждой отмеченной точке стоит фишка. Назовём *расстоянием* между двумя точками длину меньшей дуги между этими точками. При каком наибольшем n можно переставить фишки так, чтобы снова в каждой отмеченной точке было по фишке, а расстояние между любыми двумя фишками, изначально удалёнными не более, чем на n, увеличилось?

11 класс

Второй день

11.5. Существуют ли такие 2013 различных натуральных чисел, что сумма любых 2012 из них не меньше квадрата оставшегося?

11.6. Три попарно непересекающиеся окружности ω_x, ω_y, ω_z радиусов r_x, r_y, r_z соответственно лежат по одну сторону от прямой t и касаются ее в точках X, Y, Z соответственно. Известно, что Y — середина отрезка XZ, $r_x = r_z = r$, а $r_y > r$. Пусть p — одна из общих внутренних касательных к окружностям ω_x и ω_y, а q — одна из общих внутренних касательных к окружностям ω_y и ω_z. В пересечении прямых p, q, t образовался неравнобедренный треугольник. Докажите, что радиус вписанной в него окружности равен r.

11.7. Найдите все натуральные k такие, что при каждом нечётном $n > 100$ число $20^n + 13^n$ делится на k.

11.8. Фигура «мамонт» бьёт как слон (по диагоналям), но только в трёх направлениях из четырех (отсутствующее направление может быть разным для разных мамонтов). Какое наибольшее число не бьющих друг друга мамонтов можно расставить на шахматной доске 8×8?

XXXIX Всероссийская математическая олимпиада школьников

11 класс

Второй день

11.5. Существуют ли такие 2013 различных натуральных чисел, что сумма любых 2012 из них не меньше квадрата оставшегося?

11.6. Три попарно непересекающиеся окружности ω_x, ω_y, ω_z радиусов r_x, r_y, r_z соответственно лежат по одну сторону от прямой t и касаются ее в точках X, Y, Z соответственно. Известно, что Y — середина отрезка XZ, $r_x = r_z = r$, а $r_y > r$. Пусть p — одна из общих внутренних касательных к окружностям ω_x и ω_y, а q — одна из общих внутренних касательных к окружностям ω_y и ω_z. В пересечении прямых p, q, t образовался неравнобедренный треугольник. Докажите, что радиус вписанной в него окружности равен r.

11.7. Найдите все натуральные k такие, что при каждом нечётном $n > 100$ число $20^n + 13^n$ делится на k.

11.8. Фигура «мамонт» бьёт как слон (по диагоналям), но только в трёх направлениях из четырех (отсутствующее направление может быть разным для разных мамонтов). Какое наибольшее число не бьющих друг друга мамонтов можно расставить на шахматной доске 8×8?