

9 класс

Первый день

- 9.1. По кругу расставлены 99 натуральных чисел. Известно, что любые два соседних числа отличаются или на 1, или на 2, или в два раза. Докажите, что хотя бы одно из этих чисел делится на 3.
- 9.2. Серёжа выбрал два различных натуральных числа a и b . Он записал в тетрадь четыре числа: a , $a + 2$, b и $b + 2$. Затем он выписал на доску все шесть попарных произведений чисел из тетради. Какое наибольшее количество точных квадратов может быть среди чисел на доске?
- 9.3. В выпуклом n -угольнике проведено несколько диагоналей. Проведённая диагональ называется *хорошей*, если она пересекается (по внутренним точкам) ровно с одной из других проведённых диагоналей. Найдите наибольшее возможное количество хороших диагоналей.
- 9.4. Точка M — середина стороны AC остроугольного треугольника ABC , в котором $AB > BC$. Окружность Ω описана около треугольника ABC . Касательные к Ω , проведённые в точках A и C , пересекаются в точке P . Отрезки BP и AC пересекаются в точке S . Пусть AD — высота треугольника ABP . Окружность ω , описанная около треугольника CSD , пересекает окружность Ω в точке $K \neq C$. Докажите, что $\angle CKM = 90^\circ$.

9 класс

Первый день

- 9.1. По кругу расставлены 99 натуральных чисел. Известно, что любые два соседних числа отличаются или на 1, или на 2, или в два раза. Докажите, что хотя бы одно из этих чисел делится на 3.
- 9.2. Серёжа выбрал два различных натуральных числа a и b . Он записал в тетрадь четыре числа: a , $a + 2$, b и $b + 2$. Затем он выписал на доску все шесть попарных произведений чисел из тетради. Какое наибольшее количество точных квадратов может быть среди чисел на доске?
- 9.3. В выпуклом n -угольнике проведено несколько диагоналей. Проведённая диагональ называется *хорошей*, если она пересекается (по внутренним точкам) ровно с одной из других проведённых диагоналей. Найдите наибольшее возможное количество хороших диагоналей.
- 9.4. Точка M — середина стороны AC остроугольного треугольника ABC , в котором $AB > BC$. Окружность Ω описана около треугольника ABC . Касательные к Ω , проведённые в точках A и C , пересекаются в точке P . Отрезки BP и AC пересекаются в точке S . Пусть AD — высота треугольника ABP . Окружность ω , описанная около треугольника CSD , пересекает окружность Ω в точке $K \neq C$. Докажите, что $\angle CKM = 90^\circ$.

10 класс

Первый день

- 10.1. Назовём натуральное число *хорошим*, если среди его делителей есть ровно два простых числа. Могут ли 18 подряд идущих натуральных чисел быть хорошими?
- 10.2. Дана функция f , определённая на множестве действительных чисел и принимающая действительные значения. Известно, что для любых x и y таких, что $x > y$, верно неравенство $(f(x))^2 \leq f(y)$. Докажите, что множество значений функции содержится в промежутке $[0, 1]$.
- 10.3. В сейфе n ячеек с номерами от 1 до n . В каждой ячейке первоначально лежала карточка с её номером. Вася переложил карточки в некотором порядке так, что в i -й ячейке оказалась карточка с числом a_i . Петя может менять местами любые две карточки с номерами x и y , платя за это $2|x - y|$ рублей. Докажите, что Петя сможет вернуть все карточки на исходные места, заплатив не более $|a_1 - 1| + |a_2 - 2| + \dots + |a_n - n|$ рублей.
- 10.4. Треугольник ABC ($AB > BC$) вписан в окружность Ω . На сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно так, что $AM = CN$. Прямые MN и AC пересекаются в точке K . Пусть P — центр вписанной окружности треугольника AMK , а Q — центр невписанной окружности треугольника CNK , касающейся стороны CN . Докажите, что середина дуги ABC окружности Ω равноудалена от точек P и Q .

10 класс

Первый день

- 10.1. Назовём натуральное число *хорошим*, если среди его делителей есть ровно два простых числа. Могут ли 18 подряд идущих натуральных чисел быть хорошими?
- 10.2. Дана функция f , определённая на множестве действительных чисел и принимающая действительные значения. Известно, что для любых x и y таких, что $x > y$, верно неравенство $(f(x))^2 \leq f(y)$. Докажите, что множество значений функции содержится в промежутке $[0, 1]$.
- 10.3. В сейфе n ячеек с номерами от 1 до n . В каждой ячейке первоначально лежала карточка с её номером. Вася переложил карточки в некотором порядке так, что в i -й ячейке оказалась карточка с числом a_i . Петя может менять местами любые две карточки с номерами x и y , платя за это $2|x - y|$ рублей. Докажите, что Петя сможет вернуть все карточки на исходные места, заплатив не более $|a_1 - 1| + |a_2 - 2| + \dots + |a_n - n|$ рублей.
- 10.4. Треугольник ABC ($AB > BC$) вписан в окружность Ω . На сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно так, что $AM = CN$. Прямые MN и AC пересекаются в точке K . Пусть P — центр вписанной окружности треугольника AMK , а Q — центр невписанной окружности треугольника CNK , касающейся стороны CN . Докажите, что середина дуги ABC окружности Ω равноудалена от точек P и Q .

11 класс

Первый день

- 11.1. Существует ли такое положительное число a , что при всех действительных x верно неравенство

$$|\cos x| + |\cos ax| > \sin x + \sin ax?$$

- 11.2. Петя и Вася играют в игру на клетчатой доске $n \times n$. Изначально вся доска белая, за исключением угловой клетки — она чёрная, и в ней стоит ладья. Игроки ходят по очереди. Каждым ходом игрок передвигает ладью по горизонтали или вертикали, при этом все клетки, через которые ладья перемещается (включая ту, в которую она попадает), перекрашиваются в чёрный цвет. Ладья не должна передвигаться через чёрные клетки или останавливаться на них. Проигрывает тот, кто не может сделать ход; первым ходит Петя. Кто выиграет при правильной игре?

- 11.3. Положительные рациональные числа a и b записаны в виде десятичных дробей, у каждой из которых минимальный период состоит из 30 цифр. У десятичной записи числа $a - b$ длина минимального периода равна 15. При каком наименьшем натуральном k длина минимального периода десятичной записи числа $a + kb$ может также оказаться равной 15?

- 11.4. Треугольник ABC ($AB > BC$) вписан в окружность Ω . На сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно так, что $AM = CN$. Прямые MN и AC пересекаются в точке K . Пусть P — центр вписанной окружности треугольника AMK , а Q — центр внеписанной окружности треугольника CNK , касающейся стороны CN . Докажите, что середина дуги ABC окружности Ω равноудалена от точек P и Q .

11 класс

Первый день

- 11.1. Существует ли такое положительное число a , что при всех действительных x верно неравенство

$$|\cos x| + |\cos ax| > \sin x + \sin ax?$$

- 11.2. Петя и Вася играют в игру на клетчатой доске $n \times n$. Изначально вся доска белая, за исключением угловой клетки — она чёрная, и в ней стоит ладья. Игроки ходят по очереди. Каждым ходом игрок передвигает ладью по горизонтали или вертикали, при этом все клетки, через которые ладья перемещается (включая ту, в которую она попадает), перекрашиваются в чёрный цвет. Ладья не должна передвигаться через чёрные клетки или останавливаться на них. Проигрывает тот, кто не может сделать ход; первым ходит Петя. Кто выиграет при правильной игре?

- 11.3. Положительные рациональные числа a и b записаны в виде десятичных дробей, у каждой из которых минимальный период состоит из 30 цифр. У десятичной записи числа $a - b$ длина минимального периода равна 15. При каком наименьшем натуральном k длина минимального периода десятичной записи числа $a + kb$ может также оказаться равной 15?

- 11.4. Треугольник ABC ($AB > BC$) вписан в окружность Ω . На сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно так, что $AM = CN$. Прямые MN и AC пересекаются в точке K . Пусть P — центр вписанной окружности треугольника AMK , а Q — центр внеписанной окружности треугольника CNK , касающейся стороны CN . Докажите, что середина дуги ABC окружности Ω равноудалена от точек P и Q .