9 класс

Второй день

9.5. К натуральному числу N прибавили наибольший его делитель, меньший N, и получили степень десятки. Найдите все такие N.

9.6. Трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD вписана в окружность Ω. Окружность ω проходит через точки C, D и пересекает отрезки CA, CB в точках A_1, B_1 соответственно. Точки A_2 и B_2 симметричны точкам A_1 и B_1 относительно середин отрезков CA и CB соответственно. Докажите, что точки A, B, A_2 и B_2 лежат на одной окружности.

9.7. В республике математиков выбрали число $\alpha > 2$ и выпустили монеты достоинствами в 1 рубль, а также в α^k рублей при каждом натуральном k. При этом α было выбрано так, что достоинства всех монет, кроме самой мелкой, иррациональны. Могло ли оказаться, что любую сумму в натуральное число рублей можно набрать этими монетами, используя монеты каждого достоинства не более 6 раз?

9.8. В государстве n городов, и между каждыми двумя из них курсирует экспресс (в обе стороны). Для любого экспресса цены билетов «туда» и «обратно» равны, а для любых разных экспрессов эти цены различны. Докажите, что путешественник может выбрать начальный город, выехать из него и проехать последовательно на $n-1$ экспрессах, платя за проезд на каждом следующем меньше, чем за проезд на предыдущем. (Путешественник может попадать несколько раз в один и тот же город.)

XL Всероссийская математическая олимпиада школьников

9 класс

Второй день

9.5. К натуральному числу N прибавили наибольший его делитель, меньший N, и получили степень десятки. Найдите все такие N.

9.6. Трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD вписана в окружность Ω. Окружность ω проходит через точки C, D и пересекает отрезки CA, CB в точках A_1, B_1 соответственно. Точки A_2 и B_2 симметричны точкам A_1 и B_1 относительно середин отрезков CA и CB соответственно. Докажите, что точки A, B, A_2 и B_2 лежат на одной окружности.

9.7. В республике математиков выбрали число $\alpha > 2$ и выпустили монеты достоинствами в 1 рубль, а также в α^k рублей при каждом натуральном k. При этом α было выбрано так, что достоинства всех монет, кроме самой мелкой, иррациональны. Могло ли оказаться, что любую сумму в натуральное число рублей можно набрать этими монетами, используя монеты каждого достоинства не более 6 раз?

9.8. В государстве n городов, и между каждыми двумя из них курсирует экспресс (в обе стороны). Для любого экспресса цены билетов «туда» и «обратно» равны, а для любых разных экспрессов эти цены различны. Докажите, что путешественник может выбрать начальный город, выехать из него и проехать последовательно на $n-1$ экспрессах, платя за проезд на каждом следующем меньше, чем за проезд на предыдущем. (Путешественник может попадать несколько раз в один и тот же город.)

10 класс

Второй день

10.5. К натуральному числу N прибавили наибольший его делитель, меньший N, и получили степень десятки. Найдите все такие N.

10.6. Точка M — середина стороны AC треугольника ABC. На отрезках AM и CM выбраны точки P и Q соответственно таким образом, что $PQ = AC/2$. Окружность, описанная около треугольника ABQ, пересекает сторону BC в точке $X \neq B$, а окружность, описанная около треугольника BCP, пересекает сторону AB в точке $Y \neq B$. Докажите, что четырёхугольник $BXMY$ — вписанный.

10.7. В республике математиков выбрали число $\alpha > 2$ и выпустили монеты достоинствами в 1 рубль, а также в α^k рублей при каждом натуральном k. При этом α было выбрано так, что достоинства всех монет, кроме самой мелкой, иррациональны. Могло ли оказаться, что любую сумму в натуральное число рублей можно набрать этими монетами, используя монеты каждого достоинства не более 6 раз?

10.8. На плоскости дано n выпуклых попарно пересекающихся k-угольников. Любой из них можно перевести в любой другой гомотетией с положительным коэффициентом. Докажите, что на плоскости найдётся точка, принадлежащая хотя бы $1 + \frac{n-1}{2k}$ из этих k-угольников.

XL Всероссийская математическая олимпиада школьников

10 класс

Второй день

10.5. К натуральному числу N прибавили наибольший его делитель, меньший N, и получили степень десятки. Найдите все такие N.

10.6. Точка M — середина стороны AC треугольника ABC. На отрезках AM и CM выбраны точки P и Q соответственно таким образом, что $PQ = AC/2$. Окружность, описанная около треугольника ABQ, пересекает сторону BC в точке $X \neq B$, а окружность, описанная около треугольника BCP, пересекает сторону AB в точке $Y \neq B$. Докажите, что четырёхугольник $BXMY$ — вписанный.

10.7. В республике математиков выбрали число $\alpha > 2$ и выпустили монеты достоинствами в 1 рубль, а также в α^k рублей при каждом натуральном k. При этом α было выбрано так, что достоинства всех монет, кроме самой мелкой, иррациональны. Могло ли оказаться, что любую сумму в натуральное число рублей можно набрать этими монетами, используя монеты каждого достоинства не более 6 раз?

10.8. На плоскости дано n выпуклых попарно пересекающихся k-угольников. Любой из них можно перевести в любой другой гомотетией с положительным коэффициентом. Докажите, что на плоскости найдётся точка, принадлежащая хотя бы $1 + \frac{n-1}{2k}$ из этих k-угольников.

11 класс

Второй день

11.5. Натуральное число n назовём *хорошим*, если каждый его натуральный делитель, увеличенный на 1, является делителем числа $n+1$. Найдите все хорошие натуральные числа.

11.6. Сфера ω проходит через вершину S пирамиды $SABC$ и пересекает рёбра SA, SB и SC вторично в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Сфера Ω, описанная около пирамиды $SABC$, пересекается с ω по окружности, лежащей в плоскости, параллельной плоскости (ABC). Точки A_2, B_2 и C_2 симметричны точкам A_1, B_1 и C_1 относительно середин рёбер SA, SB и SC соответственно. Докажите, что точки A, B, C, A_2, B_2 и C_2 лежат на одной сфере.

11.7. Исходно на доске написаны многочлены x^3-3x^2+5 и x^2-4x. Если на доске уже написаны многочлены $f(x)$ и $g(x)$, разрешается дописать на неё многочлены $f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $f(g(x))$ и $cf(x)$, где c — произвольная (не обязательно целая) константа. Может ли на доске после нескольких операций появиться ненулевой многочлен вида x^n-1?

11.8. Двое игроков играют в карточную игру. У них есть колода из n попарно различных карт. Про любые две карты из колоды известно, какая из них бьёт другую (при этом, если A бьёт B, а B бьёт C, то может оказаться, что C бьёт A). Колода распределена между игроками произвольным образом. На каждом ходу игроки открывают по верхней карте из своих колод, и тот, чья карта бьёт карту другого игрока, берёт обе карты и кладёт их в самый низ своей колоды в произвольном порядке по своему усмотрению. Докажите, что при любой исходной раздаче игроки могут, зная расположение карт, договориться и действовать так, чтобы один из игроков остался без карт.

XL Всероссийская математическая олимпиада школьников

11 класс

Второй день

11.5. Натуральное число n назовём *хорошим*, если каждый его натуральный делитель, увеличенный на 1, является делителем числа $n+1$. Найдите все хорошие натуральные числа.

11.6. Сфера ω проходит через вершину S пирамиды $SABC$ и пересекает рёбра SA, SB и SC вторично в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Сфера Ω, описанная около пирамиды $SABC$, пересекается с ω по окружности, лежащей в плоскости, параллельной плоскости (ABC). Точки A_2, B_2 и C_2 симметричны точкам A_1, B_1 и C_1 относительно середин рёбер SA, SB и SC соответственно. Докажите, что точки A, B, C, A_2, B_2 и C_2 лежат на одной сфере.

11.7. Исходно на доске написаны многочлены x^3-3x^2+5 и x^2-4x. Если на доске уже написаны многочлены $f(x)$ и $g(x)$, разрешается дописать на неё многочлены $f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $f(g(x))$ и $cf(x)$, где c — произвольная (не обязательно целая) константа. Может ли на доске после нескольких операций появиться ненулевой многочлен вида x^n-1?

11.8. Двое игроков играют в карточную игру. У них есть колода из n попарно различных карт. Про любые две карты из колоды известно, какая из них бьёт другую (при этом, если A бьёт B, а B бьёт C, то может оказаться, что C бьёт A). Колода распределена между игроками произвольным образом. На каждом ходу игроки открывают по верхней карте из своих колод, и тот, чья карта бьёт карту другого игрока, берёт обе карты и кладёт их в самый низ своей колоды в произвольном порядке по своему усмотрению. Докажите, что при любой исходной раздаче игроки могут, зная расположение карт, договориться и действовать так, чтобы один из игроков остался без карт.