Материалы для проведения заключительного этапа

XL ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2013–2014 учебный год

Первый день

Ярославль, 24–30 апреля 2014 г.

Москва, 2014

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа XL Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Акопян, А. В. Антропов, Д. А. Белов, А. Я. Белов-Канель, С. Л. Берлов, Н. В. Богачёв, И. И. Богданов, С. Г. Волчёнков, А. И. Гарбер, А. А. Глазырин, А. И. Голованов, О. Ю. Дмитриев, В. Л. Дольников, С. А. Дориченко, Л. А. Емельянов, Г. М. Иванов, Ф. А. Ивлев, Д. Д. Карпушкин, П. А. Кожевников, М. А. Кунгожин, А. Д. Матушкин, И. В. Митрофанов, А. В. Пастор, О. К. Подлипский, А. А. Полянский, А. М. Райгородский, И. С. Рубанов, Р. С. Садыков, В. А. Сендеров, А. Б. Скопенков, М. Б. Скопенков, К. А. Сухов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Компьютерный макет: И. И. Богданов.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Запрещается публикация или размещение в сети Интернет условий или решений задач олимпиады.

Условия и решения задач

9 класс

9.1. По кругу расставлены 99 натуральных чисел. Известно, что любые два соседних числа отличаются или на 1, или на 2, или в два раза. Докажите, что хотя бы одно из этих чисел делится на 3. (*С. Берлов*)

Решение. Пусть ни одно из чисел не делится на 3. Тогда каждое число даёт остаток 1 или 2 при делении на 3. Но числа, дающие одинаковые ненулевые остатки при делении на 3, не могут отличаться на 1 или на 2; не могут они и отличаться в два раза. Значит, соседние числа дают различные остатки при делении на 3, то есть остатки 1 и 2 чередуются. Но тогда общее количество чисел должно быть чётным, что не так. Противоречие.

9.2. Серёжа выбрал два различных натуральных числа a и b. Он записал в тетрадь четыре числа: a, $a+2$, b и $b+2$. Затем он выписал на доску все шесть попарных произведений чисел из тетради. Какое наибольшее количество точных квадратов может быть среди чисел на доске? (*С. Берлов*)

Ответ. Два.

Решение. Заметим, что никакие два квадрата натуральных чисел не отличаются на 1, ибо $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$, где вторая скобка больше единицы. Значит, числа $a(a+2)=(a+1)^2-1$ и $b(b+2)=(b+1)^2-1$ квадратами не являются. Более того, числа ab и $a(b+2)$ не могут одновременно являться квадратами, иначе их произведение $a^2\cdot b(b+2)$ также было бы квадратом, а тогда и число $b(b+2)$ тоже. Аналогично, из чисел $(a+2)b$ и $(a+2)(b+2)$ максимум одно может быть квадратом. Итого, квадратов на доске не больше двух.

Два квадрата могут получиться, например, при $a=2$ и $b=16$: тогда $a(b+2)=6^2$ и $(a+2)b=8^2$.

Замечание. Существуют и другие примеры, например, $a=6$ и $b=96$.

9.3. В выпуклом n-угольнике проведено несколько диагоналей. Проведённая диагональ называется *хорошей*, если она пересекается (по внутренним точкам) ровно с одной из других проведённых диагоналей. Найдите наибольшее возможное количество хороших диагоналей. (*С. Берлов*)

Ответ. $n-2$ при чётных n, $n-3$ при нечётных n.

Решение. Мы будем пользоваться следующей известной леммой.

Лемма. *В выпуклом n-угольнике нельзя провести более $n-3$ диагоналей, не имеющих общих внутренних точек.*

Сначала докажем индукцией по n, что количество хороших диагоналей не превосходит $n-2$, если n чётно, и $n-3$, если n нечётно. При этом мы будем считать, что отрезок является 2-угольником без диагоналей. При $n = 2, 3$ утверждение очевидно. Пусть $n \geqslant 4$; обозначим наш многоугольник через $P = A_1A_2\ldots A_n$.

Если никакие две хороших диагонали не пересекаются, то по лемме их количество не превосходит $n-3$. Пусть теперь найдутся две пересекающихся хороших диагонали A_iA_k и A_jA_ℓ $(i < j < k < \ell)$. Тогда каждая из них не пересекается с другими проведёнными диагоналями. Выбросим A_iA_k и A_jA_ℓ из рассмотрения. Каждая оставшаяся проведённая диагональ d является диагональю или стороной ровно в одном из многоугольников $Q_1 = A_i\ldots A_j$, $Q_2 = A_j\ldots A_k$, $Q_3 = A_k\ldots A_\ell$ или $Q_4 = A_\ell\ldots A_nA_1\ldots A_i$ (см. рис. 1). При этом, если d является стороной одного из них, то она не может пересекаться с другими диагоналями (и не является хорошей).

Пусть n чётно. По предположению индукции, среди всех диагоналей, попавших в какой-то многоугольник Q_s, хороших не больше, чем количество вершин в нём, уменьшенное на 2. Значит, общее количество хороших диагоналей в P не превосходит

$$2+(j-i-1)+(k-j-1)+(\ell-k-1)+(n-\ell+i-1) = n-2, \quad (*)$$

что и требовалось.

При нечётном n сумма количеств вершин в многоугольниках Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 равна нечётному числу $n+4$; значит, число вершин в одном из них нечётно. А тогда соответствующее слагаемое в сумме ($*$) уменьшится на 1, и мы получим, что общее число хороших диагоналей не превосходит $n-3$. Переход индукции завершён.

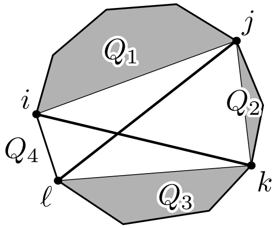

Рис. 1

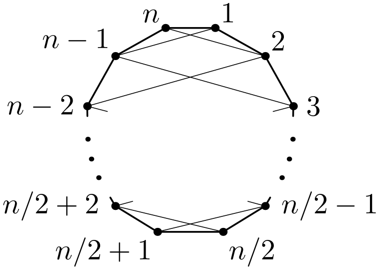

Рис. 2

Осталось привести примеры, показывающие точность оценки. При чётном n достаточно провести в многоугольнике $A_1 \ldots A_n$ диагонали A_iA_{n-i} и $A_{i+1}A_{n-i+1}$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n/2-1$ (см. рис. 2); они разбиваются на пары пересекающихся хороших диагоналей. При нечётном n достаточно провести такие же диагонали в чётноугольнике $A_1 \ldots A_{n-1}$.

Замечание. При нечётном n существуют и принципиально другие примеры — например, можно взять все диагонали из точки A_1 (они будут хорошими) и добавить к ним диагональ A_2A_n.

9.4. Точка M — середина стороны AC остроугольного треугольника ABC, в котором $AB > BC$. Окружность Ω описана около треугольника ABC. Касательные к Ω, проведённые в точках A и C, пересекаются в точке P. Отрезки BP и AC пересекаются в точке S. Пусть AD — высота треугольника ABP. Окружность ω, описанная около треугольника CSD, пересекает окружность Ω в точке $K \neq C$. Докажите, что $\angle CKM = 90^\circ$. (*В. Шмаров*)

Решение. Поскольку $\angle AMP = \angle ADP = 90^\circ$, точки M и D лежат на окружности γ с диаметром AP. Поскольку PA — касательная к Ω, имеем $\angle KAP = \angle ACK$. Так как точки C, K, D и S лежат на окружности ω, имеем $\angle ACK = \angle KDP$. Значит, $\angle KAP = \angle ACK = \angle KDP$, то есть точки A, D, K и P лежат на одной окружности. Итак, точка K лежит на γ, и $\angle AKP = 90^\circ$ (см. рис. 3).

Отсюда имеем $\angle MKP = 180^\circ - \angle MAP = 180^\circ - \angle ABC =$

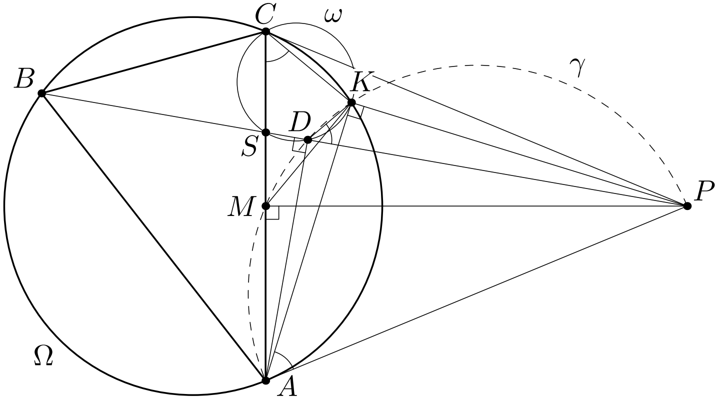

Рис. 3

$= \angle AKC$. Значит, $\angle MKC = \angle AKC - \angle AKM = \angle MKP - \angle AKM = \angle AKP = 90^\circ$, что и требовалось доказать.

Замечание. Из условия следует, что точка D лежит внутри Ω, но вне $\triangle ABC$.

10 класс

10.1. Назовём натуральное число *хорошим*, если среди его делителей есть ровно два простых числа. Могут ли 18 подряд идущих натуральных чисел быть хорошими? (*О. Подлипский*)

Ответ. Не могут.

Решение. Предположим, что нашлись 18 хороших чисел подряд. Среди них найдутся три числа, делящихся на 6. Пусть это числа $6n$, $6(n+1)$ и $6(n+2)$. Поскольку эти числа — хорошие, и в разложение каждого из них на простые множители входят двойка и тройка, других простых делителей у них быть не может.

Далее, лишь одно из трёх подряд идущих натуральных чисел n, $n+1$, $n+2$ может делиться на 3. Значит, остальные два являются степенями двойки. Но пары степеней двойки, отличающихся не более чем на два — это только $(1, 2)$ и $(2, 4)$; поэтому $n \leqslant 2$. Однако тогда среди наших 18 чисел есть простое число 13 (так как $6n \leqslant 13 \leqslant 6(n+2)$), не являющееся хорошим. Противоречие.

10.2. Дана функция f, определённая на множестве действительных чисел и принимающая действительные значения. Известно, что для любых x и y таких, что $x > y$, верно неравенство $(f(x))^2 \leqslant \leqslant f(y)$. Докажите, что множество значений функции содержится в промежутке $[0, 1]$. *(А. Храбров)*

Решение. По условию $f(y) \geqslant (f(y+1))^2 \geqslant 0$ для любого y, поэтому все значения функции неотрицательны.

Пусть теперь $f(x_0) = 1 + a > 1$ для некоторого x_0. Докажем индукцией по n, что для любого $y < x_0$ верно неравенство $f(y) > 1 + 2^n a$. При $n = 1$ имеем $f(y) \geqslant (f(x_0))^2 = 1 + 2a + a^2 > > 1+2a$. Для перехода от n к $n+1$ заметим, что $y < \dfrac{x_0 + y}{2} < x_0$, и потому $f\left(\dfrac{x_0 + y}{2}\right) > 1 + 2^n a$ по предположению индукции. А тогда $f(y) \geqslant \left(f\left(\dfrac{x_0 + y}{2}\right)\right)^2 = 1 + 2^{n+1}a + (2^n a)^2 > 1 + 2^{n+1}a$, что и требовалось.

Итак, для любого фиксированного $y < x_0$ имеем $f(y) > 1 + + 2^n a$ при любом натуральном n. Но это невозможно, так как существует n, при котором $2^n > \dfrac{f(y) - 1}{a}$. Стало быть, $f(x) \leqslant 1$ при всех x.

10.3. В сейфе n ячеек с номерами от 1 до n. В каждой ячейке первоначально лежала карточка с её номером. Вася переложил карточки в некотором порядке так, что в i-й ячейке оказалась карточка с числом a_i. Петя может менять местами любые две карточки с номерами x и y, платя за это $2|x - y|$ рублей. Докажите, что Петя сможет вернуть все карточки на исходные места, заплатив не более $|a_1 - 1| + |a_2 - 2| + \ldots + |a_n - n|$ рублей.

(И. Богданов, Г. Иванов)

Первое решение. Пусть $(b_1, \ldots, b_n)$ — произвольное расположение карточек (здесь b_i — число на карточке в i-й ячейке). Назовём его *ценой* число $|b_1 - 1| + |b_2 - 2| + \ldots + |b_n - n|$.

Лемма. *Для любого расположения $(b_1, \ldots, b_n)$, в котором не все карточки лежат на своих местах, можно поменять местами некоторые две карточки b_i и b_j так, что цена уменьшится ровно на $2|b_i - b_j|$.*

Доказательство. Заметим, что при нашем действии цена уменьшается на

$$|b_i-i|+|b_j-j|-|b_i-j|-|b_j-i| = (|b_i-i|-|b_j-i|)+(|b_j-j|-|b_i-j|). \quad (*)$$

Нетрудно видеть, что для того, чтобы выражение $(*)$ было равно $2|b_i - b_j|$, достаточно выполнения неравенств $i \leqslant b_j < b_i \leqslant j$: тогда каждая из скобок в $(*)$ будет равна $|b_i - b_j|$. Осталось найти такие индексы i и j.

Пусть j — наибольшее число на карточке, лежащей не в своей ячейке. Карточка с числом b_j также лежит не в своей ячейке, так что $b_j < j$. Отметим первые b_j ячеек. У нас есть ровно b_j карточек с числами, не превосходящими b_j, и одна из них (карточка с числом b_j) уже лежит в неотмеченной ячейке с номером $j > b_j$. Значит, найдётся такая отмеченная ячейка i, что $b_i > b_j$. По выбору номера j, имеем $b_i \leqslant j$, откуда и следует цепочка неравенств $i \leqslant b_j < b_i \leqslant j$. □

Итак, для любого расположения, отличного от требуемого, можно уменьшить его цену на некоторое число a, заплатив ровно a. Продолжая такие действия, мы в результате придём к расположению с нулевой ценой, заплатив в процессе ровно цену исходного расположения, что и требовалось.

Замечание. Каждая скобка в выражении $(*)$ не превосходит $|b_i - b_j|$. Значит, цену расположения нельзя уменьшить на число большее, чем количество заплаченных рублей. Таким образом, цена расположения — это наименьшее число рублей, которое надо заплатить, чтобы привести его к требуемому.

Второе решение. Приведём другое доказательство леммы. Для каждого k обозначим через c_k номер ячейки, в которой лежит карточка с числом k (таким образом, $c_{b_k} = k = b_{c_k}$).

Пусть s — наименьшее число такое, что $c_s < s$; такое число найдётся, поскольку $c_1 + \ldots + c_n = 1 + \ldots + n$. Тогда карточка с числом c_s лежит не в своей ячейке. Пусть теперь t — максимальный номер ячейки, меньший s и такой, что $c_t \neq t$. Тогда обязательно $c_t > t$, ибо $t < s$; кроме того, $t \geqslant c_s$ из максимальности t. Поскольку при всех $t < k < s$ имеем $k = c_k \neq c_t$, из неравенства $c_t > t$ следует $c_t \geqslant s$. Итак, мы получили $c_s \leqslant t < s \leqslant c_t$.

Полагая $i = c_s$, $j = c_t$, приходим к требуемому неравенству $i \leqslant b_j < b_i \leqslant j$.

Замечание. Существуют и другие способы доказательства леммы.

10.4. Треугольник ABC ($AB > BC$) вписан в окружность Ω. На сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно так, что $AM = CN$. Прямые MN и AC пересекаются в точке K. Пусть P — центр вписанной окружности треугольника AMK, а Q — центр вневписанной окружности треугольника CNK, касающейся стороны CN. Докажите, что середина дуги ABC окружности Ω равноудалена от точек P и Q. (*М. Кунгожин*)

Первое решение. Мы будем использовать следующую известную *лемму о трезубце.*

Лемма. *Пусть L — середина дуги YZ (не содержащей точку X) описанной окружности треугольника XYZ. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника XYZ, а I_x — центр вневписанной окружности этого треугольника, касающейся стороны YZ. Тогда $LY = LZ = LI = LI_x$.*

Пусть S — середина дуги ABC окружности Ω. Имеем $SA = SC$ (так как S лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AC), $AM = CN$ и $\angle BCS = \angle BAS$ (как вписанные, опирающиеся на одну дугу). Значит, треугольники AMS и CNS равны, и они совмещаются поворотом Φ с центром в точке S на угол $\angle ASC = \angle ABC$. Отсюда, в частности, получаем $SM = SN$ и $\angle MSN = \angle ABC$. Из последнего равенства углов следует, что четырехугольник $MSBN$ вписан в некоторую окружность γ (см. рис. 4).

Окружности Ω_a и Ω_c, описанные соответственно около треугольников AMS и CNS, также совмещаются поворотом Φ. Пусть U и V — середины дуг AM и CN (не содержащих S) этих окружностей. Из поворота Φ получаем $SU = SV$ (то есть точка S лежит на серединном перпендикуляре к UV) и $UA = VC$. Далее, из окружностей Ω и γ имеем $\angle SAK = \angle SBC = \angle SMK$, то есть K лежит на Ω_a. Аналогично, K лежит на Ω_c.

Отсюда следует, что точки U и V вместе с точками P и Q лежат на биссектрисе угла $\angle CKN$. По лемме о трезубце (для

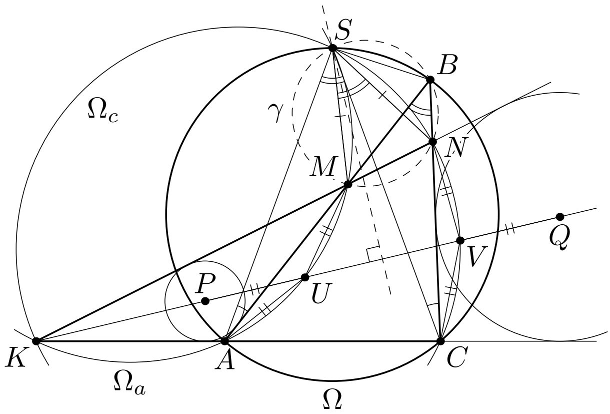

Рис. 4

треугольников KAM и KCN) имеем $UP = UA$ и $VQ = VC$. Так как $UA = VC$, это означает, что точки P и Q симметричны относительно серединного перпендикуляра к UV, на котором лежит точка S. Значит, S равноудалена от P и Q, что и требовалось.

Замечание. Точка S — это *точка Микеля* для четвёрки прямых BA, BC, AC, MN.

Второе решение. Пусть S — середина дуги ABC, а R и T — середины отрезков AC и MN соответственно. Как и в прошлом решении, получаем, что треугольники AMS и CNS равны, в частности, $SA = SC$ и $SM = SN$. Тогда из равнобедренных треугольников SAC и SMN имеем $\angle SRK = \angle STK = 90°$, то есть точки R и T лежат на окружности Γ с диаметром SK (см. рис. 5). Пусть Γ пересекает биссектрису PQ угла AKM вторично в точке D. Поскольку четырёхугольник $KRDT$ вписан в Γ, получаем $DR = DT$ и $\angle ARD = \angle DTN$.

Пусть P_1 и P_2 — точки касания вписанной окружности треугольника AKM с прямыми KA и KM соответственно, а Q_1 и Q_2 — точки касания вневписанной окружности треугольника CKN с теми же прямыми. Из равенства отрезков касательных имеем $RP_1+TP_2 = RA+AP_1+MP_2+TM = RA+AM+TM$. Аналогично, $RQ_1 + TQ_2 = RC + CN + TN$, откуда

$$RP_1 + TP_2 = RQ_1 + TQ_2.$$

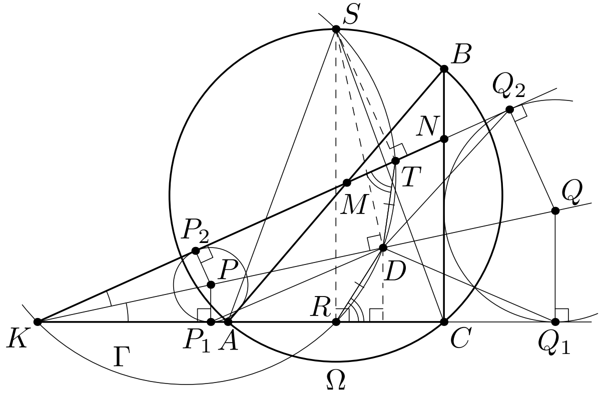

Рис. 5

С другой стороны, из симметрии имеем

$$RP_1 + RQ_1 = P_1Q_1 = P_2Q_2 = TP_2 + TQ_2.$$

Из полученных равенств следует, что $RP_1 = TQ_2$ и $RQ_1 = TP_2$.

Итак, мы имеем $DR = DT$, $RP_1 = TQ_2$ и $\angle P_1RD = \angle Q_2TD$. Значит, треугольники DTQ_2 и DRP_1 равны, и $DP_1 = DQ_2$. Поскольку из симметрии $DQ_2 = DQ_1$, получаем, что треугольник DP_1Q_1 равнобедренный, его высота из точки D является медианой, и поэтому она также является средней линией прямоугольной трапеции PQQ_1P_1. Значит, $DP = DQ$, и в треугольнике PSQ высота SD является медианой. Отсюда $SP = SQ$.

11 класс

11.1. Существует ли такое положительное число a, что при всех действительных x верно неравенство

$$|\cos x| + |\cos ax| > \sin x + \sin ax?$$

(*Н. Агаханов*)

Ответ. Не существует.

Решение. Предположим, что $0 < a \leqslant 1$. Тогда при $x = \pi/2$ левая часть примет значение $|\cos(a\pi/2)|$, то есть будет не больше 1, в то время как правая часть будет равна $1+\sin(a\pi/2)$, то есть она больше 1. Итак, неравенство не выполнено.

Если же $a > 1$, то, обозначив $ax = t$ и $b = 1/a$, мы приведём неравенство из условия к виду $|\cos bt| + |\cos t| > \sin bt + \sin t$, сводя задачу к предыдущему случаю.

11.2. Петя и Вася играют в игру на клетчатой доске $n \times n$. Изначально вся доска белая, за исключением угловой клетки — она чёрная, и в ней стоит ладья. Игроки ходят по очереди. Каждым ходом игрок передвигает ладью по горизонтали или вертикали, при этом все клетки, через которые ладья перемещается (включая ту, в которую она попадает), перекрашиваются в чёрный цвет. Ладья не должна передвигаться через чёрные клетки или останавливаться на них. Проигрывает тот, кто не может сделать ход; первым ходит Петя. Кто выиграет при правильной игре?

(*Н. Полянский*)

Ответ. Петя.

Решение. Одна из выигрышных стратегий для Пети состоит в том, чтобы каждым своим ходом делать самый длинный из возможных вертикальных ходов (например, первым ходом он пойдёт по вертикали в другой угол доски). Покажем, что, действуя согласно ей, он выиграет.

Назовём белую клетку *достижимой*, если из текущего положения ладьи в неё можно попасть за несколько ходов по белым клеткам. Покажем, что в любой момент Петя сможет сходить, причём после каждого его хода все достижимые клетки образуют несколько (не более двух) прямоугольников, в каждом из которых число строк больше числа столбцов, причём для каждого из них ладья стоит в клетке, соседней с угловой по горизонтали. Для первого хода Пети это верно.

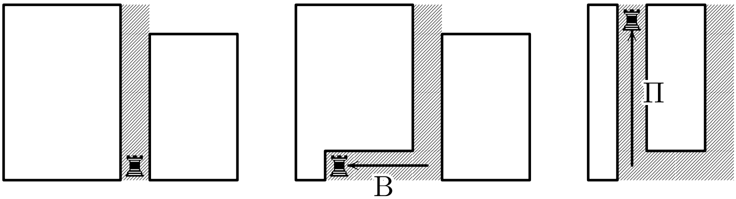

Рис. 6

Далее, если после некоторого его хода это так, то Вася вынужден ходить в один из полученных прямоугольников по горизонтали. Пусть в этом прямоугольнике r строк и c столбцов, а Вася сходит на $v \leqslant c$ клеток. После этого хода клетки оставшегося прямоугольника (если он был) перестанут быть достижимыми (см. рис. 6). Поскольку $r \geqslant c + 1 \geqslant 2$, у Пети остаётся возможность вертикального хода. После этого хода достижимые клетки будут образовывать прямоугольники $r \times (c - v)$ и $(r - 1) \times (v - 1)$. В каждом из них строк больше, чем столбцов, ибо $r > c > c - v$ и $r - 1 > c - 1 \geqslant v - 1$. При этом ладья стоит в клетке, соседней по горизонтали с угловой в каждом из этих прямоугольников; это и требовалось доказать.

Итак, мы, в частности, доказали, что Петя всегда сможет сделать ход. При этом когда-нибудь игра закончится, ибо количество белых клеток уменьшается. Значит, он выиграет.

11.3. Положительные рациональные числа a и b записаны в виде десятичных дробей, у каждой из которых минимальный период состоит из 30 цифр. У десятичной записи числа $a - b$ длина минимального периода равна 15. При каком наименьшем натуральном k длина минимального периода десятичной записи числа $a + kb$ может также оказаться равной 15? (*А.С. Голованов*)

Ответ. $k = 6$.

Решение. Домножив, если нужно, числа a и b на подходящую степень десятки, мы можем считать, что десятичные записи чисел a, b, $a - b$ и $a + kb$ — чисто периодические (то есть периоды начинаются сразу после запятой).

Воспользуемся следующим известным фактом: десятичная запись рационального числа r — чисто периодическая с (не обязательно минимальной) длиной периода T тогда и только тогда, когда r имеет вид $\frac{m}{10^T-1}$ для некоторого целого m.

Применительно к условию задачи это значит, что $a = \frac{m}{10^{30}-1}$ и $b = \frac{n}{10^{30}-1}$. Нам также известно, что числа $a - b = \frac{m-n}{10^{30}-1}$ и $a+kb = \frac{m+kn}{10^{30}-1}$ записываются десятичными дробями с периодом длины 15, то есть могут быть записаны как обыкновенные дроби со знаменателем $10^{15}-1$. Поэтому так может быть записана и их разность $(k+1)b = \frac{(k+1)n}{10^{30}-1}$. Таким образом, число $(k+1)n$ делится на $10^{15} + 1$, а число n — не делится (иначе и b записывалось бы дробью с периодом длины 15). Значит, число $k+1$ делится на некоторый простой делитель числа $10^{15}+1$. Наименьший из таких делителей — это 7. Действительно, число $10^{15}+1$ даёт остаток 1 при делении на 2 и на 5, а также остаток 2 при делении на 3. С другой стороны, оно делится на $10^3+1=7\cdot 143$. Итак, $k+1\geqslant 7$ и $k\geqslant 6$.

В некотором смысле минимальный пример чисел, удовлетворяющих условию при $k=6$, получается, если положить $a-b=\frac{1}{10^{15}-1}$ и $a+6b=\frac{2}{10^{15}-1}$. Тогда $a=\frac{8}{7(10^{15}-1)}$ и $b=\frac{1}{7(10^{15}-1)}$. Ясно, что длины минимальных периодов чисел $a-b$ и $a+6b$ равны 15. Далее, длины минимальных периодов чисел a и b больше 15 и делятся на 15 (так как 10^T-1 должно делиться на $10^{15}-1$). С другой стороны, так как $10^{30}-1 \,\vdots\, 7(10^{15}-1)$, числа a и b периодичны с длиной периода 30. Значит, длины их минимальных периодов равны 30.

11.4. Треугольник ABC $(AB>BC)$ вписан в окружность Ω. На сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно так, что $AM=CN$. Прямые MN и AC пересекаются в точке K. Пусть P — центр вписанной окружности треугольника AMK, а Q — центр вневписанной окружности треугольника CNK, касающейся стороны CN. Докажите, что середина дуги ABC окружности Ω равноудалена от точек P и Q. (*М. Кунгожин*)

Первое решение. Мы будем использовать следующую известную *лемму о трезубце*.

Лемма. *Пусть L — середина дуги YZ (не содержащей точку X) описанной окружности треугольника XYZ. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника XYZ, а I_x — центр вневписанной окружности этого треугольника, касающейся стороны YZ. Тогда $LY=LZ=LI=LI_x$.*

Пусть S — середина дуги ABC окружности Ω. Имеем $SA=SC$ (так как S лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AC), $AM=CN$ и $\angle BCS=\angle BAS$ (как вписанные, опирающиеся на одну дугу). Значит, треугольники AMS и CNS равны, и они совмещаются поворотом Φ с центром в точке S на угол $\angle ASC=\angle ABC$. Отсюда, в частности, получаем $SM = SN$ и $\angle MSN = \angle ABC$. Из последнего равенства углов следует, что четырехугольник $MSBN$ вписан в некоторую окружность γ (см. рис. 7).

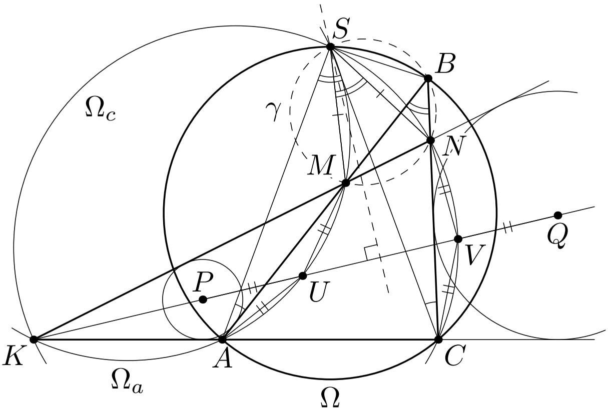

Рис. 7

Окружности Ω_a и Ω_c, описанные соответственно около треугольников AMS и CNS, также совмещаются поворотом Φ. Пусть U и V — середины дуг AM и CN (не содержащих S) этих окружностей. Из поворота Φ получаем $SU = SV$ (то есть точка S лежит на серединном перпендикуляре к UV) и $UA = VC$. Далее, из окружностей Ω и γ имеем $\angle SAK = \angle SBC = \angle SMK$, то есть K лежит на Ω_a. Аналогично, K лежит на Ω_c.

Отсюда следует, что точки U и V вместе с точками P и Q лежат на биссектрисе угла $\angle CKN$. По лемме о трезубце (для треугольников KAM и KCN) имеем $UP = UA$ и $VQ = VC$. Так как $UA = VC$, это означает, что точки P и Q симметричны относительно серединного перпендикуляра к UV, на котором лежит точка S. Значит, S равноудалена от P и Q, что и требовалось.

Замечание. Точка S — это *точка Микеля* для четвёрки прямых BA, BC, AC, MN.

Второе решение. Пусть S — середина дуги ABC, а R и T — середины отрезков AC и MN соответственно. Как и в прошлом решении, получаем, что треугольники AMS и CNS равны, в частности, $SA = SC$ и $SM = SN$. Тогда из равнобедренных

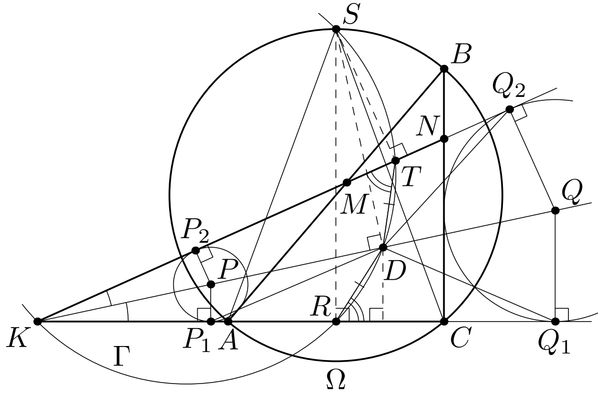

Рис. 8

треугольников SAC и SMN имеем $\angle SRK = \angle STK = 90^\circ$, то есть точки R и T лежат на окружности Γ с диаметром SK (см. рис. 8). Пусть Γ пересекает биссектрису PQ угла AKM вторично в точке D. Поскольку четырёхугольник $KRDT$ вписан в Γ, получаем $DR = DT$ и $\angle ARD = \angle DTN$.

Пусть P_1 и P_2 — точки касания вписанной окружности треугольника AKM с прямыми KA и KM соответственно, а Q_1 и Q_2 — точки касания вневписанной окружности треугольника CKN с теми же прямыми. Из равенства отрезков касательных имеем $RP_1 + TP_2 = RA + AP_1 + MP_2 + TM = RA + AM + TM$. Аналогично, $RQ_1 + TQ_2 = RC + CN + TN$, откуда

$$RP_1 + TP_2 = RQ_1 + TQ_2.$$

С другой стороны, из симметрии имеем

$$RP_1 + RQ_1 = P_1Q_1 = P_2Q_2 = TP_2 + TQ_2.$$

Из полученных равенств следует, что $RP_1 = TQ_2$ и $RQ_1 = TP_2$.

Итак, мы получили $DR = DT$, $RP_1 = TQ_2$ и $\angle P_1RD = \angle Q_2TD$. Значит, треугольники DTQ_2 и DRP_1 равны, откуда $DP_1 = DQ_2$. Поскольку из симметрии $DQ_2 = DQ_1$, получаем, что треугольник DP_1Q_1 равнобедренный, его высота из точки D является медианой, и поэтому она также является средней линией прямоугольной трапеции PQQ_1P_1. Значит, $DP = DQ$, и в треугольнике PSQ высота SD является медианой. Отсюда $SP = SQ$.