Материалы для проведения заключительного этапа

XL ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2013–2014 учебный год

Второй день

Ярославль, 24–30 апреля 2014 г.

Москва, 2014

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа XL Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Акопян, А. В. Антропов, Д. А. Белов, А. Я. Белов-Канель, С. Л. Берлов, Н. В. Богачёв, И. И. Богданов, С. Г. Волчёнков, А. И. Гарбер, А. А. Глазырин, А. И. Голованов, О. Ю. Дмитриев, В. Л. Дольников, С. А. Дориченко, Л. А. Емельянов, Г. М. Иванов, Ф. А. Ивлев, Д. Д. Карпушкин, П. А. Кожевников, М. А. Кунгожин, А. Д. Матушкин, И. В. Митрофанов, А. В. Пастор, О. К. Подлипский, А. А. Полянский, А. М. Райгородский, И. С. Рубанов, Р. С. Садыков, В. А. Сендеров, А. Б. Скопенков, М. Б. Скопенков, К. А. Сухов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Компьютерный макет: И. И. Богданов.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.5. К натуральному числу N прибавили наибольший его делитель, меньший N, и получили степень десятки. Найдите все такие N.

(*Н. Агаханов*)

Ответ. 75.

Решение. Пусть m — наибольший делитель числа N, меньший, чем N. Тогда $n = mp$, где p — наименьший простой делитель числа N. Имеем $N + m = 10^k$, то есть $m(p + 1) = 10^k$. Число в правой части не делится на 3, поэтому $p > 2$. Отсюда следует, что N — нечётное число, а тогда и m нечётно. Значит, поскольку 10^k делится на m, получаем $m = 5^s$. Если $m = 1$, то $N = p = 10^k - 1$, что невозможно, так как $10^k - 1$ делится на 9, то есть не является простым. Значит, $s \geqslant 1$, число N делится на 5, и потому $p \leqslant 5$. Если $p = 3$, то получаем равенство $4 \cdot 5^s = 10^k$, откуда $k = 2$, $m = 25$ и $N = 75$. Если же $p = 5$, то $p + 1 = 6$, и число 10^k делится на 3, что невозможно.

9.6. Трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD вписана в окружность Ω. Окружность ω проходит через точки C, D и пересекает отрезки CA, CB в точках A_1, B_1 соответственно. Точки A_2 и B_2 симметричны точкам A_1 и B_1 относительно середин отрезков CA и CB соответственно. Докажите, что точки A, B, A_2 и B_2 лежат на одной окружности. (*И. Богданов*)

Первое решение. Утверждение задачи эквивалентно равенству $CA_2 \cdot CA = CB_2 \cdot CB$. Поскольку $AA_1 = CA_2$ и $BB_1 = CB_2$, достаточно доказать, что $AA_1 \cdot AC = BB_1 \cdot BC$.

Пусть D_1 — вторая точка пересечения ω с AD (см. рис. 1). Из симметрии имеем $AD = BC$ и $AD_1 = BB_1$. Из теоремы о произведении длин отрезков секущих теперь получаем $AA_1 \cdot AC = AD_1 \cdot AD = BB_1 \cdot BC$, что и требовалось доказать.

Второе решение. Обозначим через O_1 и O центры окружностей ω и Ω соответственно; оба этих центра лежат на сере-

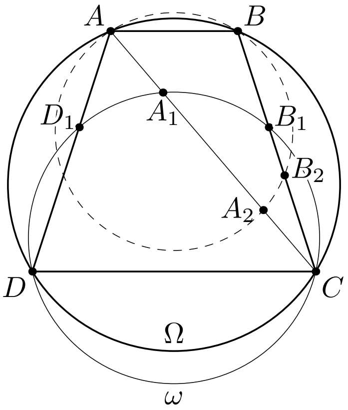

Рис. 1

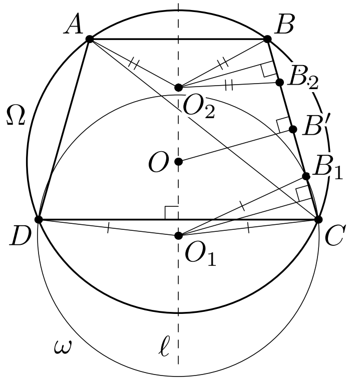

Рис. 2

динном перпендикуляре ℓ к основаниям трапеции. Пусть O_2 — точка, симметричная O_1 относительно O (см. рис. 2). Тогда O_2 также лежит на ℓ, то есть $O_2A = O_2B$. Далее, проекции точек O_2 и O_1 на BC симметричны относительно проекции точки O, т. е. относительно середины B' отрезка BC. Так как проекция точки O_1 является серединой отрезка CB_1, из симметрии относительно B' получаем, что проекция точки O_2 — это середина отрезка BB_2. Значит, $B_2O_2 = BO_2$. Аналогично показывается, что $A_2O_2 = AO_2 = BO_2 = B_2O_2$. Итак, точки A, B, A_2, B_2 лежат на окружности с центром O_2.

9.7. В республике математиков выбрали число $\alpha > 2$ и выпустили монеты достоинствами в 1 рубль, а также в α^k рублей при каждом натуральном k. При этом α было выбрано так, что достоинства всех монет, кроме самой мелкой, иррациональны. Могло ли оказаться, что любую сумму в натуральное число рублей можно набрать этими монетами, используя монеты каждого достоинства не более 6 раз? (*И. Богданов, С. Берлов*)

Ответ. Могло.

Решение. Покажем, что математики могли выбрать число $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{29}}{2}$; это число является корнем уравнения $\alpha^2 + \alpha = 7$. Ясно, что $\alpha > 2$. Нетрудно видеть, что при натуральных m мы имеем $(2\alpha)^m = a_m + b_m\sqrt{29}$, где a_m и b_m — целые числа, причём

$a_m < 0 < b_m$ при нечётных m и $a_m > 0 > b_m$ при чётных m. Значит, число α^m иррационально.

Осталось показать, что для любого натурального числа n сумму в n рублей можно набрать требуемым способом. Рассмотрим все способы набрать n рублей выпущенными монетами (хотя бы один такой способ существует: можно взять n рублёвых монет). Выберем из них способ, в котором наименьшее число монет. Предположим, что какая-то монета достоинства α^i ($i \geqslant 0$) встречается в этом способе хотя бы 7 раз. Тогда можно заменить 7 монет по α^i монетами достоинств α^{i+1} и α^{i+2}. При этом суммарное достоинство монет не изменится (поскольку $\alpha^{i+1} + \alpha^{i+2} = 7\alpha^i$), а их количество уменьшится. Это невозможно по выбору нашего способа. Итак, этот способ удовлетворяет условию.

Замечание. Как нетрудно видеть, для любого искомого числа α сумма в 7 рублей может набраться лишь как $7 = \alpha + \alpha^2$. Значит, предъявленное значение α — единственное.

9.8. В государстве n городов, и между каждыми двумя из них курсирует экспресс (в обе стороны). Для любого экспресса цены билетов «туда» и «обратно» равны, а для любых разных экспрессов эти цены различны. Докажите, что путешественник может выбрать начальный город, выехать из него и проехать последовательно на $n-1$ экспрессах, платя за проезд на каждом следующем меньше, чем за проезд на предыдущем. (Путешественник может попадать несколько раз в один и тот же город.)

(*И. Богданов*)

Первое решение. Уберём все экспрессы, а затем начнём запускать их обратно по одному в порядке возрастания цены (т. е. первым запустим самый дешёвый, вторым — самый дешёвый из остальных, и т. д.). В каждый момент в каждом городе будем писать максимальное количество экспрессов, на которых можно последовательно проехать, начав из этого города, так, чтобы цены проезда монотонно убывали.

В начальный момент все числа в городах равны нулю. Пусть в некоторый момент мы вводим экспресс, соединяющий города A и B, в которых до этого были написаны числа a и b соответственно. После введения нового экспресса в A будет число, не меньшее $b+1$ (ибо теперь из A можно проехать новым экспрессом в B, а затем по маршруту длины b, начинавшемуся из B). Аналогично, в B будет написано число, не меньшее $a+1$. Поэтому сумма чисел в A и B увеличится хотя бы на 2, а числа в остальных городах не уменьшатся. Значит, и сумма всех чисел в городах увеличится хотя бы на 2.

Таким образом, когда все $n(n-1)/2$ экспрессов будут введены, сумма чисел в городах станет не меньше, чем $2\cdot n(n-1)/2 = n(n-1)$. Значит, хотя бы в одном городе будет число, не меньшее $n-1$. Это и означает наличие требуемого маршрута из этого города.

Замечание. При любом чётном n можно построить пример, показывающий, что монотонного маршрута из n экспрессов может и не существовать.

Второе решение. Разделим каждый экспресс, курсирующий между A и B, на два — идущий из A в B, и идущий из B в A. Получились $n(n-1)$ *полуэкспрессов*. Мы построим n *выделенных маршрутов* (по одному, начинающемуся в каждом городе) так, чтобы цена поездки на каждом монотонно убывала, и каждый полуэкспресс содержался бы хотя бы в одном выделенном маршруте. Тогда один из выделенных маршрутов будет содержать не менее $n-1$ полуэкспресса, что и требовалось.

Выделенный маршрут, начинающийся в городе A, выглядит так. Пусть $A_0 = A$. Рассмотрим все полуэкспрессы A_0X, выходящие из A_0, и выберем из них полуэкспресс A_0A_1 максимальной цены a_1. Затем рассмотрим все полуэкспрессы A_1Y, выходящие из A_1, цена которых меньше a_1; если такие есть, выберем из них полуэкспресс A_1A_2 максимальной цены a_2, и т. д. Маршрут заканчивается полуэкспрессом $A_{k-1}A_k$, если из A_k не выходит полуэкспрессов с ценой, меньшей a_k.

Осталось показать, что каждый полуэкспресс BC попадёт хотя бы в один из выделенных маршрутов. Положим $B_1 = B$, $B_0 = C$, и пусть b_1 — цена BC. Рассмотрим все полуэкспрессы XB_1, ведущие в B_1, с ценой, большей b_1. Если такие есть, то выберем из них полуэкспресс B_2B_1 наименьшей цены b_2. Далее рассмотрим все полуэкспрессы YB_2, ведущие в B_2, с ценой, большей b_2. Выберем из них полуэкспресс B_3B_2 наименьшей цены b_3, и т. д. Этот процесс выбора закончится, когда при некотором k полуэкспресс B_kB_{k-1} — это полуэкспресс максимальной цены, выходящий из B_k. Тогда, согласно нашему построению, выделенный маршрут, выходящий из B_k, последовательно пройдёт через $B_{k-1}, \ldots, B_1, B_0$, то есть будет содержать экспресс BC, что и требовалось.

Замечание. На самом деле, каждый полуэкспресс попадёт ровно в один из выделенных маршрутов.

10 класс

10.5. К натуральному числу N прибавили наибольший его делитель, меньший N, и получили степень десятки. Найдите все такие N.

(*Н. Агаханов*)

Ответ. 75.

Решение. Пусть m — наибольший делитель числа N, меньший, чем N. Тогда $n = mp$, где p — наименьший простой делитель числа N. Имеем $N + m = 10^k$, то есть $m(p + 1) = 10^k$. Число в правой части не делится на 3, поэтому $p > 2$. Отсюда следует, что N — нечётное число, а тогда и m нечётно. Значит, поскольку 10^k делится на m, получаем $m = 5^s$. Если $m = 1$, то $N = p = 10^k - 1$, что невозможно, так как $10^k - 1$ делится на 9, то есть не является простым. Значит, $s \geqslant 1$, число N делится на 5, и потому $p \leqslant 5$. Если $p = 3$, то получаем равенство $4 \cdot 5^s = 10^k$, откуда $k = 2$, $m = 25$ и $N = 75$. Если же $p = 5$, то $p + 1 = 6$, и число 10^k делится на 3, что невозможно.

10.6. Точка M — середина стороны AC треугольника ABC. На отрезках AM и CM выбраны точки P и Q соответственно таким образом, что $PQ = AC/2$. Окружность, описанная около треугольника ABQ, пересекает сторону BC в точке $X \neq B$, а окружность, описанная около треугольника BCP, пересекает сторону AB в точке $Y \neq B$. Докажите, что четырёхугольник $BXMY$ — вписанный. (*Ф. Ивлев, Ф. Нилов*)

Первое решение. Из вписанности четырёхугольников

$BCPY$ и $BAQX$ следует, что $\angle APY = \angle ABC = \angle CQX$. Пусть прямая, проходящая через M параллельно QX, пересекает прямую BC в точке K, а прямая, проходящая через M параллельно PY, пересекает прямую AB в точке L (см. рис. 3). Тогда $\angle AML = \angle ABC = \angle CMK$, откуда $\angle ALM = 180^\circ - \angle LAM - \angle AML = 180^\circ - \angle BAC - \angle ABC = \angle ACB$. Значит, треугольники MAL и MKC подобны по двум углам.

Из условия имеем $AP = AM - PM = PQ - PM = MQ$; аналогично, $CQ = PM$. Отсюда $AY/YL = AP/PM = MQ/QC = KX/XC$. Значит, Y и X — соответственные точки в подобных треугольниках MAL и MKC. Следовательно, $\angle MXC = \angle MYL = \angle MYB$. Это и означает, что четырёхугольник $BYMX$ вписан.

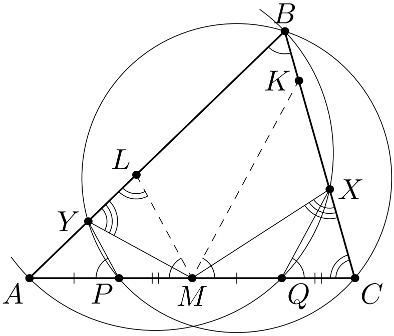

Рис. 3

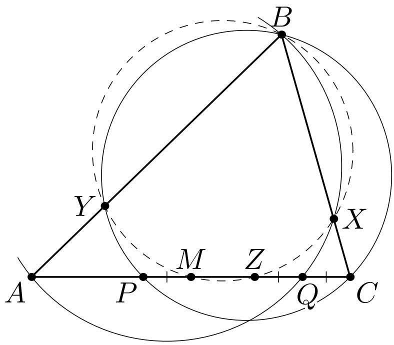

Рис. 4

Второе решение. Выберем на отрезке PQ точку Z такую, что $CQ = QZ$ (см. рис. 4). Тогда, так как $AC = 2PQ$, имеем $AP + QC = AC - PQ = PQ$, откуда $PZ = PQ - QZ = PQ - QC = AP$.

Из вписанности четырёхугольника $BYPC$ имеем $AB \cdot AY = AP \cdot AC = 2AP \cdot \frac{AC}{2} = AZ \cdot AM$. Аналогично получаем, что $CX \cdot CB = CZ \cdot CM$. Если $Z \neq M$, полученные равенства означают, что каждая из четвёрок точек B, Y, Z, M и B, X, Z, M лежит на одной окружности, то есть точки X и Y лежат на окружности, описанной около треугольника BMZ. Отсюда и следует требуемое.

Наконец, если $Z = M$, то те же равенства означают, что точки X и Y лежат на (единственной!) окружности, проходящей через B и касающейся AC в точке M, откуда опять же следует требуемое.

10.7. В республике математиков выбрали число $\alpha > 2$ и выпустили монеты достоинствами в 1 рубль, а также в α^k рублей при каждом натуральном k. При этом α было выбрано так, что достоинства всех монет, кроме самой мелкой, иррациональны. Могло ли оказаться, что любую сумму в натуральное число рублей можно набрать этими монетами, используя монеты каждого достоинства не более 6 раз? (*И. Богданов, С. Берлов*)

Ответ. Могло.

Решение. Покажем, что математики могли выбрать число $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{29}}{2}$; это число является корнем уравнения $\alpha^2 + \alpha = 7$. Ясно, что $\alpha > 2$. Нетрудно видеть, что при натуральных m мы имеем $(2\alpha)^m = a_m + b_m\sqrt{29}$, где a_m и b_m — целые числа, причём $a_m < 0 < b_m$ при нечётных m и $a_m > 0 > b_m$ при чётных m. Значит, число α^m иррационально.

Осталось показать, что для любого натурального числа n сумму в n рублей можно набрать требуемым способом. Рассмотрим все способы набрать n рублей выпущенными монетами (хотя бы один такой способ существует: можно взять n рублёвых монет). Выберем из них способ, в котором наименьшее число монет. Предположим, что какая-то монета достоинства α^i ($i \geqslant 0$) встречается в этом способе хотя бы 7 раз. Тогда можно заменить 7 монет по α^i монетами достоинств α^{i+1} и α^{i+2}. При этом суммарное достоинство монет не изменится (поскольку $\alpha^{i+1} + \alpha^{i+2} = 7\alpha^i$), а их количество уменьшится. Это невозможно по выбору нашего способа. Итак, этот способ удовлетворяет условию.

Замечание. Как нетрудно видеть, для любого искомого числа α сумма в 7 рублей может набраться лишь как $7 = \alpha + \alpha^2$. Значит, предъявленное значение α — единственное.

10.8. На плоскости дано n выпуклых попарно пересекающихся k-угольников. Любой из них можно перевести в любой другой гомотетией с положительным коэффициентом. Докажите, что на плоскости найдётся точка, принадлежащая хотя бы $1+\frac{n-1}{2k}$ из этих k-угольников. (*А. Акопян*)

Решение. Лемма. *Пусть P и P' — пересекающиеся выпуклые многоугольники, гомотетичные с положительным коэффициентом. Тогда одна из вершин одного из них лежит в другом.*

Доказательство. Если один из многоугольников полностью лежит в другом, то утверждение очевидно. В противном случае найдётся сторона AB многоугольника P, пересекающая границу P'. Если P' содержит одну из точек A или B, то утверждение доказано. В ином случае P' пересекает AB по отрезку, лежащему внутри AB.

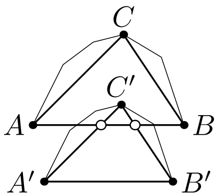

Рис. 5

Заметим, что у P' есть вершины по обе стороны от прямой AB. Рассмотрим сторону $A'B'$ многоугольника P', соответствующую AB, и произвольную вершину C' многоугольника P', лежащую по другую сторону от прямой AB, нежели сторона $A'B'$. Пусть C — вершина многоугольника P, соответствующая C'. Тогда C' лежит в треугольнике ABC, так как относительно каждой из прямых AB, BC и AC она находится по ту же сторону, что и этот треугольник (см. рис. 5). Тем самым C' принадлежит P. Лемма доказана. $\square$

Пусть $P_1, \ldots, P_n$ — данные k-угольники, и пусть $A_{i,1}, \ldots, A_{i,k}$ — вершины многоугольника P_i. Для каждой вершины $A_{i,j}$ посчитаем количество $a_{i,j}$ многоугольников P_s $(s \neq i)$, в которых она лежит. Ввиду леммы, каждая пара многоугольников вносит единичный вклад хотя бы в одну из величин $a_{i,j}$. Значит, $a_{1,1}+\ldots+a_{n,k} \geqslant \frac{n(n-1)}{2}$. Поэтому одно из чисел $a_{i,j}$ не меньше $\frac{n(n-1)}{2nk}=\frac{n-1}{2k}$. Так как вершина $A_{i,j}$ лежит в многоугольнике P_i и ещё в $a_{i,j}$ других многоугольниках, она принадлежит хотя бы $1+\frac{n-1}{2k}$ многоугольникам. Значит, эта точка — требуемая.

11 класс

11.5. Натуральное число n назовём *хорошим*, если каждый его натуральный делитель, увеличенный на 1, является делителем числа $n+1$. Найдите все хорошие натуральные числа. (*С. Берлов*)

Ответ. Единица и все нечётные простые числа.

Решение. Ясно, что $n = 1$ удовлетворяет условию. Также ему удовлетворяют все нечётные простые: если $n = p$, то его делители, увеличенные на 1, есть 2 и $p+1$; оба они делят $p+1$. С другой стороны, у любого числа n, удовлетворяющего условию, есть делитель 1; значит, $n+1$ делится на $1+1$, то есть n нечётно.

Предположим теперь, что какое-то составное n удовлетворяет условию. Имеем $n = ab$, где $a \geqslant b \geqslant 2$. Тогда число $n+1$ делится на $a+1$; кроме того, число $n+b = (a+1)b$ также делится на $a+1$. Значит, и число $b-1 = (n+b)-(n+1)$ также делится на $a+1$. Так как $b-1 > 0$, получаем, что $b-1 \geqslant a+1$. Но это противоречит неравенству $b \leqslant a$.

11.6. Сфера ω проходит через вершину S пирамиды $SABC$ и пересекает рёбра SA, SB и SC вторично в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Сфера Ω, описанная около пирамиды $SABC$, пересекается с ω по окружности, лежащей в плоскости, параллельной плоскости (ABC). Точки A_2, B_2 и C_2 симметричны точкам A_1, B_1 и C_1 относительно середин рёбер SA, SB и SC соответственно. Докажите, что точки A, B, C, A_2, B_2 и C_2 лежат на одной сфере. (*И. Богданов*)

Первое решение. Утверждение задачи эквивалентно равенству $SA_2 \cdot SA = SB_2 \cdot SB = SC_2 \cdot SC$. Значит, ввиду равенств $AA_1 = SA_2$ и двух аналогичных, достаточно доказать, что $AA_1 \cdot AS = BB_1 \cdot BS = CC_1 \cdot CS$.

Пусть ℓ — прямая, проходящая через центры сфер Ω и ω. Окружность пересечения этих сфер лежит в плоскости, перпендикулярной ℓ, так что $\ell \perp (ABC)$. Это значит, что при повороте вокруг ℓ описанная окружность треугольника ABC переходит в себя, и подходящим таким поворотом можно точку A перевести в B. Пусть точки S и A_1 при этом повороте переходят в S' и A_1' (они тоже лежат на ω, см. рис. 6). Тогда

$AA_1 \cdot AS = BA_1' \cdot BS' = BB_1 \cdot BS$. Равенство $AA_1 \cdot AS = CC_1 \cdot CS$ доказывается аналогично.

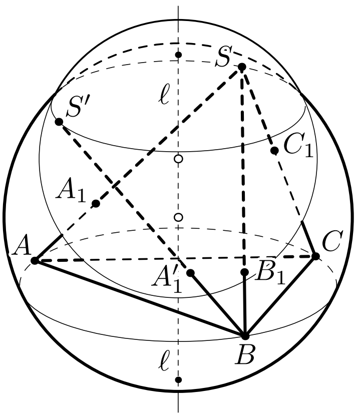

Рис. 6

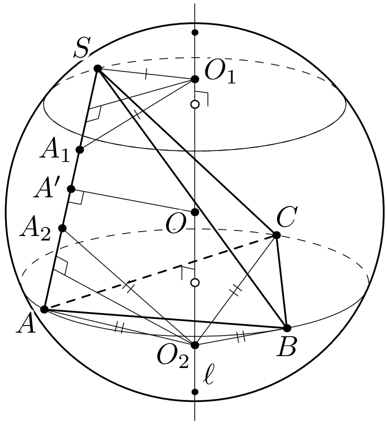

Рис. 7

Второе решение. Обозначим через O_1 и O центры сфер ω и Ω соответственно. Как и в первом решении, введём прямую ℓ, проходящую через O и O_1; тогда $\ell \perp (ABC)$.

Пусть O_2 — точка, симметричная O_1 относительно O. Тогда O_2 лежит на ℓ, откуда $O_2A = O_2B = O_2C$; обозначим $r = O_2A$. Далее, проекции точек O_2 и O_1 на SA симметричны относительно проекции точки O, т. е. относительно середины A' отрезка SA. Так как проекция точки O_1 является серединой отрезка SA_1, из симметрии относительно A' получаем, что проекция точки O_2 — это середина отрезка AA_2. Значит, $A_2O_2 = AO_2 = r$. Аналогично показывается, что $B_2O_2 = C_2O_2 = r$. Значит, требуемые шесть точек лежат на сфере с центром O_2 и радиусом r.

11.7. Исходно на доске написаны многочлены $x^3 - 3x^2 + 5$ и $x^2 - 4x$. Если на доске уже написаны многочлены $f(x)$ и $g(x)$, разрешается дописать на неё многочлены $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $f(g(x))$ и $cf(x)$, где c — произвольная (не обязательно целая) константа. Может ли на доске после нескольких операций появиться ненулевой многочлен вида $x^n - 1$? *(К. Тыщук)*

Ответ. Не может.

Первое решение. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — два многочлена, и для некоторой точки x_0 выполняются равенства $f'(x_0) = 0$ и $g'(x_0) = 0$. Тогда, очевидно, $(f \pm g)'(x_0) = 0$ и $cf'(x_0) = 0$. Также $(fg)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0) = 0$. Наконец, если $h(x)$ — многочлен, то $(h(g(x_0))' = h'(g(x_0))g'(x_0) = 0$. Таким образом, если у исходных многочленов в некоторой точке производные обращаются в нуль, то и после разрешенных условием операций также может получиться лишь многочлен, производная которого обращается в нуль в этой точке.

Заметим, что производные обоих исходных многочленов обращаются в нуль при $x = 2$. Действительно, $(x^2 - 4x)' = 2x - 4 = 0$ при $x = 2$, и $(x^3 - 3x^2 + 5)' = 3x^2 - 6x = 0$ при $x = 2$. Однако $(x^n - 1)' = nx^{n-1} = n2^{n-1} \neq 0$ при $x = 2$. Поэтому многочлен вида $x^n - 1$ получить нельзя.

Второе решение. Добавим на доску константу 2 и покажем, что даже после этого требуемое невозможно.

Сделаем замену $x = t + 2$: каждому многочлену $f(x)$ сопоставим многочлен $f_2(t) = f(t + 2)$. Тогда многочлены $x^2 - 4x$ и $x^3 - 3x^2 + 5$ переходят в многочлены $t^2 - 4$ и $t^3 + 3t^2 + 1$ соответственно. При этом результаты операций суммы, разности, перемножения многочленов и умножения на константу при такой замене сохранятся. С другой стороны, если $h(x) = f(g(x))$, то $h_2(t) = f(g(t + 2)) = f_2(g_2(t) - 2)$. Таким образом, если многочлен $h(x)$ можно получить из многочленов $f(x)$ и $g(x)$, то и многочлен $h_2(x)$ можно получить из многочленов $f_2(x)$ и $g_2(x)$ (при наличии константы 2). Значит, если из исходных многочленов можно получить $x^n - 1$, то из многочленов $t^2 - 4$ и $t^3 + 3t^2 + 1$ можно получить многочлен $(t + 2)^n - 1$.

Заметим, что у всех исходных многочленов коэффициент при t равен нулю. Нетрудно видеть тогда, что и у всех получающихся многочленов коэффициент при t также будет нулевым. Однако у многочлена $(t + 2)^n - 1$ этот коэффициент равен $n2^{n-1} > 0$, так что этот многочлен получить нельзя.

11.8. Двое игроков играют в карточную игру. У них есть колода из n попарно различных карт. Про любые две карты из колоды известно, какая из них бьёт другую (при этом, если A бьёт B, а

B бьёт C, то может оказаться, что C бьёт A). Колода распределена между игроками произвольным образом. На каждом ходу игроки открывают по верхней карте из своих колод, и тот, чья карта бьёт карту другого игрока, берёт обе карты и кладёт их в самый низ своей колоды в произвольном порядке по своему усмотрению. Докажите, что при любой исходной раздаче игроки могут, зная расположение карт, договориться и действовать так, чтобы один из игроков остался без карт. (*Е. Лакштанов*)

Решение. Выпишем все возможные ситуации, которые могут встретиться в игре (т. е. все возможные пары колод у участников). Назовём ситуацию *финальной*, если все карты у одного игрока; *критической*, если у одного из игроков ровно одна карта; и *регулярной*, если у обоих игроков хотя бы по две карты. Проведём стрелку от каждой ситуации к ситуациям, которые могут из неё получиться после одного хода. Тогда из любой нефинальной ситуации ведут две стрелки, а из любой финальной — ноль. Нам надо доказать, что из каждой нефинальной ситуации по стрелкам можно дойти до финальной.

Выясним, сколько стрелок ведут в каждую ситуацию. Предположим, что она получилась в результате какого-то хода, в котором карты взял первый игрок. Тогда у него оказалось хотя бы две карты, которые лежат в конце колоды; при этом известно, что одна из них — a — бьёт другую — b. Значит, в этом случае карта a была у первого игрока, а карта b — у второго, то есть предыдущая ситуация восстанавливается однозначно. Итак, если наша ситуация регулярна, то на предыдущем ходе карты мог получить любой из двух игроков, и в каждом из этих случаев предыдущая ситуация восстанавливается однозначно. Значит, в каждую регулярную ситуацию ведут ровно две стрелки. Аналогично, в каждую нерегулярную ситуацию ведёт ровно одна стрелка.

Предположим, что из некоторой ситуации S нельзя попасть в финальную. Назовём ситуацию *достижимой*, если в неё можно добраться из S. Из каждой достижимой ситуации ведут две стрелки в достижимые. С другой стороны, в каждую достижимую ситуацию ведёт не более двух стрелок из достижимых. Это возможно только в том случае, если в каждую достижимую ситуацию ведёт ровно по две стрелки из достижимых. Из этого, в частности, следует, что все достижимые ситуации регулярны. Более того, поскольку в каждую ситуацию ведёт не более двух стрелок, получаем, что все стрелки, входящие в достижимые ситуации, выходят также из достижимых.

Пусть в ситуации S у первого игрока $k > 1$ карт. Тогда в одной из двух ситуаций, из которых ведут стрелки в S, у первого игрока $k - 1$ карта — назовём эту ситуацию S_1; по показанному выше, она достижима. Аналогично, если $k-1 > 1$, то в одной из двух ситуаций, из которых ведут стрелки в S_1, у первого игрока $k - 2$ карты; назовём её S_2 и продолжим рассуждения. В итоге мы получим цепочку из достижимых ситуаций $S_1, S_2, \ldots, S_{k-1}$, причём в S_{k-1} у первого игрока одна карта, т. е. она критическая, и в неё входит только одна стрелка. Но в каждую достижимую ситуацию должно входить две стрелки — противоречие.