9 класс

Второй день

9.5. Число x таково, что среди четырёх чисел $x-\sqrt{2}$, $x-1/x$, $x+1/x$, $x^2+2\sqrt{2}$ ровно одно не является целым. Найдите все такие x.

9.6. Имеются 2013 карточек, на которых написана цифра 1, и 2013 карточек, на которых написана цифра 2. Вася складывает из этих карточек 4026-значное число. За один ход Петя может поменять местами некоторые две карточки и заплатить Васе 1 рубль. Процесс заканчивается, когда у Пети получается число, делящееся на 11. Какую наибольшую сумму может заработать Вася, если Петя стремится заплатить как можно меньше?

9.7. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке K. Оказалось, что точки B, D, а также середины отрезков AC и KC лежат на одной окружности. Какие значения может принимать угол ADC?

9.8. Какое из чисел больше: $(100!)!$ или $99!^{100!}\cdot 100!^{99!}$? (Напомним, что $n! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n$.)

Бесплатный онлайн-разбор заданий 1 и 2 туров олимпиады состоится 5 февраля. Начало разбора для 9 класса в 16-00 по московскому времени. Разбор проводят члены центральной методической комиссии по математике Всероссийской олимпиады школьников. Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на сайте `online.mipt.ru` не менее чем за полчаса до начала разбора.

XL Всероссийская математическая олимпиада школьников

9 класс

Второй день

9.5. Число x таково, что среди четырёх чисел $x-\sqrt{2}$, $x-1/x$, $x+1/x$, $x^2+2\sqrt{2}$ ровно одно не является целым. Найдите все такие x.

9.6. Имеются 2013 карточек, на которых написана цифра 1, и 2013 карточек, на которых написана цифра 2. Вася складывает из этих карточек 4026-значное число. За один ход Петя может поменять местами некоторые две карточки и заплатить Васе 1 рубль. Процесс заканчивается, когда у Пети получается число, делящееся на 11. Какую наибольшую сумму может заработать Вася, если Петя стремится заплатить как можно меньше?

9.7. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке K. Оказалось, что точки B, D, а также середины отрезков AC и KC лежат на одной окружности. Какие значения может принимать угол ADC?

9.8. Какое из чисел больше: $(100!)!$ или $99!^{100!}\cdot 100!^{99!}$? (Напомним, что $n! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n$.)

Бесплатный онлайн-разбор заданий 1 и 2 туров олимпиады состоится 5 февраля. Начало разбора для 9 класса в 16-00 по московскому времени. Разбор проводят члены центральной методической комиссии по математике Всероссийской олимпиады школьников. Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на сайте `online.mipt.ru` не менее чем за полчаса до начала разбора.

10 класс

Второй день

10.5. На доске написано уравнение $x^3 + *x^2 + *x + * = 0$. Петя и Вася по очереди заменяют звёздочки на рациональные числа: вначале Петя заменяет любую из звёздочек, потом Вася — любую из двух оставшихся, а затем Петя — оставшуюся звёздочку. Верно ли, что при любых действиях Васи Петя сможет получить уравнение, у которого разность каких-то двух корней равна 2014?

10.6. Треугольник ABC вписан в окружность Ω с центром O. Окружность, построенная на AO как на диаметре, пересекает описанную окружность треугольника OBC в точке $S \neq O$. Касательные к Ω в точках B и C пересекаются в точке P. Докажите, что точки A, S и P лежат на одной прямой.

10.7. По кругу стоят 10^{1000} натуральных чисел. Между каждыми двумя соседними числами записали их наименьшее общее кратное. Могут ли эти наименьшие общие кратные образовать 10^{1000} последовательных чисел (расположенных в каком-то порядке)?

10.8. Петя поставил на доску 50×50 несколько фишек, в каждую клетку — не больше одной. Докажите, что Вася может поставить на свободные поля этой же доски не более 99 новых фишек (возможно, ни одной) так, чтобы по-прежнему в каждой клетке стояло не больше одной фишки, и в каждой строке и каждом столбце этой доски оказалось чётное количество фишек.

Бесплатный онлайн-разбор заданий 1 и 2 туров олимпиады состоится 5 февраля. Начало разбора для 10 класса в 18-00 по московскому времени. Разбор проводят члены центральной методической комиссии по математике Всероссийской олимпиады школьников. Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на сайте `online.mipt.ru` не менее чем за полчаса до начала разбора.

XL Всероссийская математическая олимпиада школьников

10 класс

Второй день

10.5. На доске написано уравнение $x^3 + *x^2 + *x + * = 0$. Петя и Вася по очереди заменяют звёздочки на рациональные числа: вначале Петя заменяет любую из звёздочек, потом Вася — любую из двух оставшихся, а затем Петя — оставшуюся звёздочку. Верно ли, что при любых действиях Васи Петя сможет получить уравнение, у которого разность каких-то двух корней равна 2014?

10.6. Треугольник ABC вписан в окружность Ω с центром O. Окружность, построенная на AO как на диаметре, пересекает описанную окружность треугольника OBC в точке $S \neq O$. Касательные к Ω в точках B и C пересекаются в точке P. Докажите, что точки A, S и P лежат на одной прямой.

10.7. По кругу стоят 10^{1000} натуральных чисел. Между каждыми двумя соседними числами записали их наименьшее общее кратное. Могут ли эти наименьшие общие кратные образовать 10^{1000} последовательных чисел (расположенных в каком-то порядке)?

10.8. Петя поставил на доску 50×50 несколько фишек, в каждую клетку — не больше одной. Докажите, что Вася может поставить на свободные поля этой же доски не более 99 новых фишек (возможно, ни одной) так, чтобы по-прежнему в каждой клетке стояло не больше одной фишки, и в каждой строке и каждом столбце этой доски оказалось чётное количество фишек.

Бесплатный онлайн-разбор заданий 1 и 2 туров олимпиады состоится 5 февраля. Начало разбора для 10 класса в 18-00 по московскому времени. Разбор проводят члены центральной методической комиссии по математике Всероссийской олимпиады школьников. Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на сайте `online.mipt.ru` не менее чем за полчаса до начала разбора.

11 класс

Второй день

11.5. Числа x, y и z таковы, что все три числа $x+yz$, $y+zx$ и $z+xy$ рациональны, а $x^2+y^2=1$. Докажите, что число xyz^2 также рационально.

11.6. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке K. Оказалось, что точки B, D, а также середины отрезков AC и KC лежат на одной окружности. Какие значения может принимать угол ADC?

11.7. Дан многочлен

$$P(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

у которого каждый коэффициент a_i принадлежит отрезку $[100, 101]$. При каком минимальном n у такого многочлена может найтись действительный корень?

11.8. Петя поставил на доску 50×50 несколько фишек, в каждую клетку — не больше одной. Докажите, что Вася может поставить на свободные поля этой же доски не более 99 новых фишек (возможно, ни одной) так, чтобы по-прежнему в каждой клетке стояло не больше одной фишки, и в каждой строке и каждом столбце этой доски оказалось чётное количество фишек.

Бесплатный онлайн-разбор заданий 1 и 2 туров олимпиады состоится 5 февраля. Начало разбора для 11 класса в 16-00 по московскому времени. Разбор проводят члены центральной методической комиссии по математике Всероссийской олимпиады школьников. Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на сайте `online.mipt.ru` не менее чем за полчаса до начала разбора.

XL Всероссийская математическая олимпиада школьников

11 класс

Второй день

11.5. Числа x, y и z таковы, что все три числа $x+yz$, $y+zx$ и $z+xy$ рациональны, а $x^2+y^2=1$. Докажите, что число xyz^2 также рационально.

11.6. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке K. Оказалось, что точки B, D, а также середины отрезков AC и KC лежат на одной окружности. Какие значения может принимать угол ADC?

11.7. Дан многочлен

$$P(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

у которого каждый коэффициент a_i принадлежит отрезку $[100, 101]$. При каком минимальном n у такого многочлена может найтись действительный корень?

11.8. Петя поставил на доску 50×50 несколько фишек, в каждую клетку — не больше одной. Докажите, что Вася может поставить на свободные поля этой же доски не более 99 новых фишек (возможно, ни одной) так, чтобы по-прежнему в каждой клетке стояло не больше одной фишки, и в каждой строке и каждом столбце этой доски оказалось чётное количество фишек.

Бесплатный онлайн-разбор заданий 1 и 2 туров олимпиады состоится 5 февраля. Начало разбора для 11 класса в 16-00 по московскому времени. Разбор проводят члены центральной методической комиссии по математике Всероссийской олимпиады школьников. Для участия в разборе необходимо зарегистрироваться на сайте `online.mipt.ru` не менее чем за полчаса до начала разбора.