Материалы для проведения заключительного этапа

XLI ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2014–2015 учебный год

Первый день

Казань, 23–29 апреля 2015 г.

Москва, 2015

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа XLI Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, Д. А. Белов, С. Л. Берлов, Н. В. Богачёв, И. И. Богданов, А. С. Волостнов, С. Г. Волчёнков, А. А. Гаврилюк, А. С. Голованов, М. А. Григорьев, М. А. Дидин, О. Ю. Дмитриев, С. А. Дориченко, М. А. Евдокимов, Л. А. Емельянов, Г. М. Иванов, П. А. Кожевников, А. Н. Магазинов, И. В. Митрофанов, Е. Г. Молчанов, О. С. Нечаева, А. В. Пастор, О. К. Подлипский, А. А. Полянский, И. С. Рубанов, М. Б. Скопенков, К. А. Сухов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, А. Г. Якубов.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Рецензенты: д. ф.-м. н. Р. Н. Карасёв, к. ф.-м. н. Б. В. Трушин.

Компьютерный макет: И. И. Богданов.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Запрещается публикация или размещение в сети Интернет условий или решений задач олимпиады.

Условия и решения задач

9 класс

9.1. Числа a и b таковы, что каждый из двух квадратных трёхчленов $x^2 + ax + b$ и $x^2 + bx + a$ имеет по два различных корня, а произведение этих трёхчленов имеет ровно три различных корня. Найдите все возможные значения суммы этих трёх корней.

(*С. Берлов*)

Ответ. 0.

Решение. Из условия следует, что трёхчлены $x^2 + ax + b$ и $x^2 + bx + a$ имеют общий корень x_0, а также отличные от него корни x_1 и x_2 соответственно; в частности, $a \neq b$. Тогда $0 = (x_0^2 + ax_0 + b) - (x_0^2 + bx_0 + a) = (a - b)(x_0 - 1)$, то есть $x_0 = 1$. Подставляя этот корень в любой трёхчлен, получаем $0 = 1+a+b$, то есть $b = -a-1$. Итак, наши трёхчлены имеют вид $x^2+ax-(a+1) = (x-1)(x+a+1)$ и $x^2-(a+1)x+a = (x-1)(x-a)$. Их корнями являются числа 1, a и $-(a+1)$ (при $a \neq 1, -2, -1/2$ они различны), сумма которых равна нулю.

Замечание. После получения равенства $0 = 1 + a + b$ можно завершить решение по-другому. По теореме Виета имеем $x_0 + x_1 = -a$, $x_0+x_2 = -b$, откуда $x_0+x_1+x_2 = -a-b-x_0 = 0$.

9.2. Параллелограмм $ABCD$ таков, что $\angle B < 90^\circ$ и $AB < BC$. Точки E и F выбраны на окружности ω, описанной около треугольника ABC, так, что касательные к ω в этих точках проходят через D. Оказалось, что $\angle EDA = \angle FDC$. Найдите угол ABC.

(*А. Якубов*)

Ответ. 60°.

Решение. Пусть ℓ — биссектриса угла EDF. Поскольку DE и DF — касательные к ω, прямая ℓ проходит через центр O окружности ω.

Совершим симметрию относительно ℓ. Так как $\angle EDA = \angle FDC$, луч DC перейдёт в луч DA. Поскольку ℓ проходит через O, окружность ω перейдет в себя; значит, точка C переходит в точку C', лежащую на DA и на ω. При этом, так как $AD \neq DC$, точки C' и A различны (см. рис. 1).

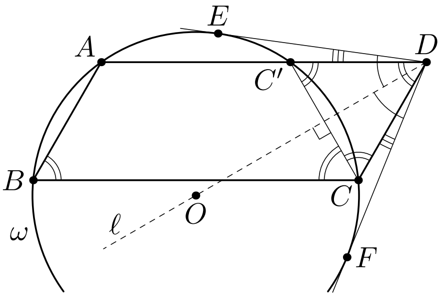

Рис. 1

Из той же симметрии имеем $\angle DCC' = \angle DC'C$. Так как точки A, B, C и C' лежат на ω, имеем $\angle DC'C = \angle ABC = \angle ADC$. Итак, все три угла треугольника DCC' равны, откуда $\angle ABC = \angle CDC' = 60^\circ$.

9.3. Натуральные числа a, x и y, большие 100, таковы, что $y^2 - 1 = a^2(x^2 - 1)$. Какое наименьшее значение может принимать дробь a/x? (*В. Сендеров*)

Ответ. 2.

Первое решение. Перепишем условие задачи в виде $y^2 = a^2x^2 - a^2 + 1$. Заметим, что $y < ax$, поскольку правая часть равенства меньше $(ax)^2$. Но y и ax — целые числа, поэтому $y \leqslant ax - 1$. Следовательно,

$$a^2x^2 - a^2 + 1 = y^2 \leqslant (ax-1)^2 = a^2x^2 - 2ax + 1.$$

Стало быть, $2ax \leqslant a^2$, то есть $a/x \geqslant 2$.

Оценка достигается при любом $x > 100$, если положить $a = 2x$, $y = ax - 1 = 2x^2 - 1$.

Второе решение. Приведём другое доказательство оценки $a/x \geqslant 2$. Перепишем равенство из условия в виде

$$(ax - y)(ax + y) = a^2x^2 - y^2 = a^2 - 1.$$

Числа $a^2 - 1$ и $ax + y$ положительны, поэтому число $k = ax - y$ также положительно (и натурально). Тогда $ax + y = \dfrac{a^2-1}{k}$. Складывая два равенства, получаем

$$2ax = \frac{a^2-1}{k} + k = a^2 + \frac{(k-1)(k-a^2+1)}{k} \leqslant a^2,$$

поскольку $1 \leqslant k \leqslant a^2 - 1$. Итак, $2ax \leqslant a^2$, то есть $a/x \geqslant 2$.

9.4. В волейбольном турнире участвовали 110 команд, каждая сыграла с каждой из остальных ровно одну игру (в волейболе не бывает ничьих). Оказалось, что в любой группе из 55 команд найдётся одна, которая проиграла не более, чем четырём из остальных 54 команд этой группы. Докажите, что во всём турнире найдётся команда, проигравшая не более, чем четырём из остальных 109 команд. (*С. Берлов*)

Решение. Лемма. *Пусть $k \geqslant 55$, и пусть среди любых k команд найдётся одна, которая проиграла не более, чем четырём из остальных $k-1$ команд. Тогда и среди любых $k+1$ команд найдётся одна, которая проиграла не более, чем четырём из остальных k команд.*

Доказательство. Предположив противное, рассмотрим набор из $k+1$ команд $M = \{C_1, C_2, \ldots, C_{k+1}\}$, для которых требуемой команды не найдётся. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, k+1$, если выкинуть из M команду C_i, то среди оставшихся найдётся команда C_j, проигравшая не более, чем четырём из остальных. Поскольку C_j не является требуемой для всего набора M, она проиграла также команде C_i и, более того, проиграла ровно пяти командам из M. Назовём такую команду C_j *подходящей* для команды C_i.

Рассмотрим все команды из M, являющиеся подходящими хотя бы для одной другой команды. Каждая из них является подходящей максимум для пяти из $k+1 \geqslant 56$ команд; значит, по принципу Дирихле, число s подходящих команд не менее 12.

Рассмотрим все игры между подходящими командами. Этих игр всего $s(s-1)/2$, и в каждой из них одна из s подходящих команд проиграла. Опять же по принципу Дирихле, одна из подходящих команд проиграла не менее, чем $\dfrac{s(s-1)}{2} : s = \dfrac{s-1}{2} \geqslant \dfrac{11}{2}$ другим подходящим командам. Значит, одна из подходящих команд проиграла хотя бы шести командам, что невозможно. Полученное противоречие доказывает лемму. $\square$

Для решения задачи покажем индукцией по $k = 55, 56, \ldots, 110$, что среди любых k команд найдётся одна, которая проиграла не более, чем четырём из остальных $k-1$ команд. База при $k = 55$ верна по условию, а переход доказан в лемме. Значит, это утверждение верно при $k = 110$, что и требовалось.

10 класс

10.1. Назовём натуральное число *почти квадратом*, если оно равно произведению двух последовательных натуральных чисел. Докажите, что каждый почти квадрат можно представить в виде частного двух почти квадратов. (*В. Сендеров*)

Решение. Любой почти квадрат можно записать в виде

$$n(n+1)=\frac{n(n+2)(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n^2+2n)(n^2+2n+1)}{(n+1)(n+2)}\,.$$

В числителе и знаменателе последней дроби, очевидно, также стоят почти квадраты.

10.2. Дан параллелограмм $ABCD$, в котором $AB<AC<BC$. Точки E и F выбраны на окружности ω, описанной около треугольника ABC, так, что касательные к ω в этих точках проходят через D; при этом отрезки AD и CE пересекаются. Оказалось, что $\angle ABF=\angle DCE$. Найдите угол ABC. (*А. Якубов, С. Берлов*)

Ответ. 60°.

Решение. Так как D лежит вне ω, угол ABC острый. Пусть A' — вторая точка пересечения DC и ω. Поскольку $BC>AC$, имеем $\angle DCA=\angle CAB>\angle CBA=\angle DA'A$; значит, A' лежит на продолжении отрезка DC за точку C. Заметим, что $\overset{\smile}{ECA'}=$ $=2(180^\circ-\angle ECA')=2\angle ECD=2\angle ABF=\overset{\smile}{ACF}$ (см. рис. 2).

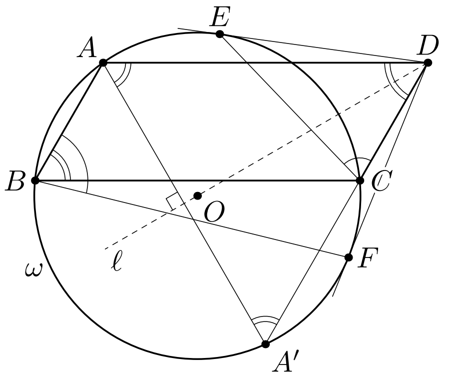

Рис. 2

Пусть ℓ — биссектриса угла EDF. Поскольку DE и DF — касательные к ω, прямая ℓ проходит через центр O окружности ω. Совершим симметрию относительно ℓ; при этом ω перейдёт в себя. Так как $\overparen{ECA'} = \overparen{ACF}$, точки A и A' при этой симметрии переходят друг в друга. Значит, $\angle DAA' = \angle DA'A$. С другой стороны, поскольку точка A' лежит на ω, имеем $\angle AA'C = \angle ABC = \angle ADA'$. Итак, все три угла треугольника DAA' равны, откуда $\angle ABC = \angle ADA' = 60^\circ$.

10.3. На соревнованиях по фигурному велосипедированию было 100 судей. Каждый судья упорядочил всех участников (от лучшего по его мнению — к худшему). Оказалось, что ни для каких трёх участников A, B, C не нашлось трёх судей, один из которых считает, что A — лучший из трёх, а B — худший, другой — что B лучший, а C худший, а третий — что C лучший, а A худший. Докажите, что можно составить общий рейтинг участников так, чтобы для любых двух участников A и B тот, кто выше в рейтинге, был бы лучше другого по мнению хотя бы половины судей. (*И. Богданов*)

Решение. Построим граф, вершинами которого будут участники, и от A будет идти ориентированное ребро к B, если A лучше B по мнению хотя бы 51 судьи (в этом случае мы будем писать $A \to B$). Таким образом, A и B не будут соединены ребром ровно тогда, когда каждый лучше другого по мнению ровно 50 судей.

Лемма. *Если $A \to B$ и $B \to C$, то $A \to C$.*

Доказательство. Предположим противное: C лучше A по мнению хотя бы 50 судей. Мы знаем, что B лучше A по мнению не более 49 судей; значит, найдётся судья, который считает, что C лучше A, а A лучше B. Аналогично, найдётся судья, считающий, что B лучше C, а тот лучше A, а также судья, считающий, что A лучше B, а тот лучше C. Существование этих трёх судей противоречат условию. $\square$

Перейдём к решению. Докажем индукцией по n, что в ориентированном графе на n вершинах, для которого выполнено утверждение леммы, можно пронумеровать вершины так, чтобы каждая стрелка шла от меньшего числа к большему. Из этого следует утверждение задачи.

Индукция по n. При $n = 2$ утверждение очевидно. Для перехода докажем, что найдётся вершина A, из которой не идёт ни одной стрелки. Тогда можно этой вершине присвоить номер n, выбросить её и перенумеровать остальные вершины по предположению индукции.

Предположим, что такой вершины A нет. Тогда в каждую вершину ведёт по стрелке. Выйдем из любой вершины и будем двигаться против направления стрелок. Рано или поздно мы попадём в вершину, в которой уже были; таким образом, в графе нашёлся ориентированный цикл. Выберем из всех таких циклов цикл $A_1 \to A_2 \to \ldots \to A_k \to A_1$ наименьшей длины k.

Ясно, что $k \geqslant 3$. Если $k = 3$, то тройка вершин A_1, A_2, A_3 противоречит утверждению леммы. Если же $k > 3$, то из $A_{k-1} \to A_k \to A_1$ по лемме имеем $A_{k-1} \to A_1$, и мы нашли более короткий цикл $A_1 \to A_2 \to \ldots \to A_{k-1} \to A_1$. В любом случае мы пришли к противоречию, что и доказывает требуемое.

Замечание. Можно облегчить решение, применив следующий трюк. Введём 101-го судью, мнение которого будет совпадать с мнением 100-го. Достаточно доказать, что в новой ситуации можно составить общий рейтинг так, чтобы любые два участника были упорядочены так, как считает большинство судей (тогда в исходной ситуации так будет считать не менее половины). Дальнейшее решение несколько облегчается, поскольку в этом случае любые две вершины соответствующего графа будут соединены ребром.

10.4. Обозначим через $S(k)$ сумму цифр натурального числа k. Натуральное число a назовём *n-хорошим*, если существует такая последовательность натуральных чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n$, что $a_n = a$ и $a_{i+1} = a_i - S(a_i)$ при всех $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Верно ли, что для любого натурального n существует натуральное число, являющееся n-хорошим, но не являющееся $(n+1)$-хорошим?

(*А. Антропов*)

Ответ. Да.

Решение. Для натуральных n и k введём обозначения $f(n) = n - S(n)$ и $f^k(n) = \underbrace{f(f(\ldots(}_{k}n)\ldots))$. При увеличении числа n на 1, число $S(n)$ либо увеличивается на 1 (если n не заканчивается на 9), либо уменьшается. Это значит, что функция f нестрого возрастает, причём $f(n+10) > f(n)$ при всех n.

Первое решение. Выберем натуральное d такое, что $10^d > 20d(n+1)$, и обозначим $k = 10^d$. Пусть $b_0 = 10^k - 1$ и $c_0 = 10^k - k$. Положим $b_i = f^i(b_0)$ и $c_i = f^i(c_0)$. Мы докажем, что

$$b_n > c_n > b_{n+1}. \qquad (*)$$

Для этого мы оценим числа b_i и c_i при всех $i \leqslant n+1$.

Так как $S(c_i) \leqslant 9k$, по индукции получаем $c_i \geqslant 10^k - k - 9ki$. При $i \leqslant n+1$ имеем $(9i+1)k \leqslant 10ki \leqslant 10^{d+1}(n+1) < 10^{2d}$, а значит, в числе c_i хотя бы $k - 2d$ первых цифр — девятки. Поэтому $S(c_i) \geqslant 9(k-2d)$, откуда (опять же по индукции) имеем $c_i \leqslant 10^k - k - 9(k-2d)i$. Итак,

$$10^k - (9i+1)k \leqslant c_i \leqslant 10^k - k - 9(k-2d)i.$$

Аналогично, для b_i получаются оценки

$$10^k - 9ki - 1 \leqslant b_i \leqslant 10^k - 1 - 9(k-2d)i.$$

Таким образом, для доказательства неравенства $c_n < b_n$ достаточно проверить, что

$$10^k - k - 9(k-2d)n < 10^k - 9kn - 1,$$

т. е. $k > 18dn + 1$; это верно в силу выбора d. Чтобы доказать неравенство $b_{n+1} < c_n$, достаточно проверить, что

$$10^k - 1 - 9(k-2d)(n+1) < 10^k - (9n+1)k,$$

т. е. $8k + 1 > 18d(n+1)$, что опять же верно. Итак, $(*)$ доказано.

Из $(*)$ нетрудно вывести, что число c_n является n-хорошим, но не является $(n+1)$-хорошим. Первое верно, поскольку $c_n = f^n(c_0)$. Осталось показать, что $c_n \neq f^{n+1}(x)$ при всех натуральных x. Если $x \leqslant 10^k - 1 = b_0$, то $f^{n+1}(x) \leqslant f^{n+1}(b_0) = b_{n+1} < c_n$. Если же $x \geqslant 10^k$, то $f(x) \geqslant f(10^k) = b_0$, и поэтому $f^{n+1}(x) \geqslant f^n(b_0) = b_n > c_n$.

Второе решение. Предположим противное: любое n-хорошее число x является $(n+1)$-хорошим. Это значит, что $x = f^{n+1}(y)$ при некотором y. Тогда число $f(y)$ является n-хорошим — а значит, и $(n+1)$-хорошим; из этого, в свою очередь следует, что x является $(n+2)$-хорошим. Аналогично показывается, что любое n-хорошее число является $(n+k)$-хорошим при всех натуральных k; назовём такое число просто *хорошим*.

Выберем теперь натуральное $k > 3 \cdot 10^n$ и оценим количество D_k хороших k-значных чисел двумя способами.

1. Для каждого числа $y \in [2 \cdot 10^{k-1}, 10^k)$ число $g(y) = f^n(y)$ является хорошим. Кроме того, $g(y) \geqslant y - n \cdot 9k \geqslant y - 10^{k-1} \geqslant 10^{k-1}$, то есть $g(y)$ — хорошее k-значное число. С другой стороны, уравнение $f(x) = a$ имеет не более 10 решений при любом a, поэтому уравнение $g(y) = a$ имеет не более 10^n решений. Значит, $D_k \geqslant \dfrac{10^k - 2 \cdot 10^{k-1}}{10^n} > 24 \cdot 10^{k-1}/k$.

2. Пусть x — хорошее k-значное число. Тогда $x = f^{10^k}(y)$ при некотором y. Так как $f^{10^k}(y) \leqslant y - 10^k$, число y хотя бы $(k+1)$-значно. Пусть s — наименьшее число, для которого $f^s(y)$ является k-значным числом. Тогда $f^{s-1}(y) \geqslant 10^k$, откуда $f^s(y) = f(f^{s-1}(y)) \geqslant f(10^k) = 10^k - 1$. Таким образом, $f^s(y) = 10^k - 1$, то есть любое k-значное хорошее число есть $f^t(10^k - 1)$ при некотором t.

Покажем, что число $f^t(10^k - 1)$ может являться k-значным лишь при $t < t_0 = [20 \cdot 10^{k-1}/k] + 1$; отсюда будет следовать, что $D_k \leqslant 20 \cdot 10^{k-1}/k + 1$, что противоречит оценке из предыдущего пункта. Положим $b_0 = 10^k - 1$, $b_i = f^i(b_0)$. Достаточно показать, что $b_{t_0} < 10^{k-1}$.

Предположим противное; тогда все числа b_i при $i \leqslant t_0$ являются k-значными. Оценим количество индексов $i < t_0$ таких, что $b_i - b_{i+1} < k$ (т.е. $S(b_i) < k$). Цифры любого такого числа b_i образуют последовательность из k неотрицательных целых чисел с суммой, не большей $k - 1$. Как известно, существует ровно C_{2k-1}^{k-1} таких последовательностей. Значит, и требуемых индексов не больше, чем $C_{2k-1}^{k-1} < 2^{2k-1}$.

Итак, в последовательности $b_0, b_1, \ldots, b_{t_0}$ следующее число меньше предыдущего хотя бы на k как минимум в $t_0 - 2^{2k-1}$ случаях. Заметим, что $t_0 - 2^{2k-1} \geqslant 20 \cdot 10^{k-1}/k - 2^{2k-1} \geqslant 10^k/k$, поскольку $k \cdot 2^{2k-1} \leqslant 10^k$. Поэтому

$$b_{t_0} \leqslant b_0 - (t_0 - 2^{2k-1})k \leqslant 10^k - 10^k = 0.$$

Противоречие.

11 класс

11.1. Параллелограмм $ABCD$ таков, что $\angle B < 90^\circ$ и $AB < BC$. Точки E и F выбраны на окружности ω, описанной около треугольника ABC, так, что касательные к ω в этих точках проходят через D. Оказалось, что $\angle EDA = \angle FDC$. Найдите угол ABC.

(*А. Якубов*)

Ответ. 60°.

Решение. Пусть ℓ — биссектриса угла EDF. Поскольку DE и DF — касательные к ω, прямая ℓ проходит через центр O окружности ω.

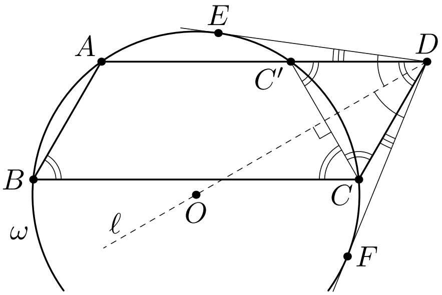

Рис. 3

Совершим симметрию относительно ℓ. Так как $\angle EDA = \angle FDC$, луч DC перейдёт в луч DA. Поскольку ℓ проходит через O, окружность ω перейдет в себя; значит, точка C переходит в точку C', лежащую на DA и на ω. При этом, так как $AD \neq DC$, точки C' и A различны (см. рис. 3).

Из той же симметрии имеем $\angle DCC' = \angle DC'C$. Так как точки A, B, C и C' лежат на ω, имеем $\angle DC'C = \angle ABC = \angle ADC$. Итак, все три угла треугольника DCC' равны, откуда $\angle ABC = \angle CDC' = 60^\circ$.

11.2. Пусть $n > 1$ — натуральное число. Выпишем дроби $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, $\ldots$, $\frac{n-1}{n}$ и приведём каждую к несократимому виду; сумму числителей полученных дробей обозначим через $f(n)$. При каких натуральных $n > 1$ числа $f(n)$ и $f(2015n)$ имеют разную чётность?

(*А. С. Голованов*)

Ответ. При всех натуральных $n > 1$.

Первое решение. Пусть $n = 2^t \cdot m$, где $t \geqslant 0$, а число m нечётно.

Рассмотрим произвольную дробь $\frac{k}{n}$. Если k делится на 2^{t+1}, то числитель этой дроби после сокращения будет чётен, в противном случае он будет нечётен. Среди чисел $1, 2, \ldots, n-1$ есть ровно $\frac{m-1}{2}$ чисел, делящихся на 2^{t+1}. Значит, в сумме $f(n)$ имеется ровно $n - 1 - \frac{m-1}{2}$ нечётных слагаемых. Поэтому $f(n)$ чётно тогда и только тогда, когда числа $n-1$ и $\frac{m-1}{2}$ имеют одинаковую чётность, т. е. в следующих двух случаях: либо n нечётно и $m \equiv 1 \pmod 4$, либо же n чётно и $m \equiv 3 \pmod 4$.

Осталось заметить, что числа n и $2015n$ имеют одну чётность; кроме того, при нечётном m числа m и $2015m$ дают разные остатки при делении на 4. Значит, числа $f(n)$ и $f(2015n)$ всегда имеют разную чётность.

Второе решение. Опять же представим n в виде $n = 2^t \cdot m$, где $t \geqslant 0$, а число m нечётно. Приведём другое доказательство того, что число $f(n)$ чётно ровно в двух случаях: либо n нечётно и $m \equiv 1 \pmod 4$, либо же n чётно и $m \equiv 3 \pmod 4$. Положим для удобства $f(1) = 0$.

Пусть n нечётно (т. е. $t = 0$). Тогда числитель дроби $\frac{k}{n}$ не меняет чётность после сокращения. Значит, количество нечётных числителей будет равно $\frac{n-1}{2}$, и число $f(n)$ чётно ровно тогда, когда чётно число $\frac{n-1}{2}$, т. е. при $m \equiv 1 \pmod 4$.

Пусть теперь n чётно (т. е. $t > 0$). Среди дробей со знаменателем n есть дробь, равная $\frac{1}{2}$ и вносящая в $f(n)$ слагаемое 1. Все остальные дроби разбиваются на пары вида $(\frac{a}{n}, \frac{n-a}{n})$. Поскольку сумма дробей в паре равна 1, после сокращения они переходят в пары несократимых дробей с одинаковым знаменателем вида $(\frac{b}{d}, \frac{d-b}{d})$. Вклад такой пары дробей в $f(n)$ равен d, и, если d чётно, он не влияет на чётность числа $f(n)$.

Таким образом, чётность $f(n)$ противоположна чётности аналогичной суммы для дробей $\frac{2^t}{2^t m}, \frac{2 \cdot 2^t}{2^t m}, \ldots, \frac{(m-1)2^t}{2^t m}$, то есть чётности числа $f(m)$ (при $m = 1$ она противоположна чётности $f(1) = 0$). Отсюда и следует требуемое.

11.3. В волейбольном турнире участвовали 110 команд, каждая сыграла с каждой из остальных ровно одну игру (в волейболе не бывает ничьих). Оказалось, что в любой группе из 55 команд найдётся одна, которая проиграла не более, чем четырём из остальных 54 команд этой группы. Докажите, что во всём турнире найдётся команда, проигравшая не более, чем четырём из остальных 109 команд. (*С. Берлов*)

Решение. Лемма. *Пусть $k \geqslant 55$, и пусть среди любых k команд найдётся одна, которая проиграла не более, чем четырём из остальных $k - 1$ команд. Тогда и среди любых $k + 1$ команд найдётся одна, которая проиграла не более, чем четырём из остальных k команд.*

Доказательство. Предположив противное, рассмотрим набор из $k + 1$ команд $M = \{C_1, C_2, \ldots, C_{k+1}\}$, для которых требуемой команды не найдётся. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, k+1$, если выкинуть из M команду C_i, то среди оставшихся найдётся команда C_j, проигравшая не более, чем четырём из остальных. Поскольку C_j не является требуемой для всего набора M, она проиграла также команде C_i и, более того, проиграла ровно пяти командам из M. Назовём такую команду C_j *подходящей* для команды C_i.

Рассмотрим все команды из M, являющиеся подходящими хотя бы для одной другой команды. Каждая из них является подходящей максимум для пяти из $k + 1 \geqslant 56$ команд; значит, по принципу Дирихле, число s подходящих команд не менее 12.

Рассмотрим все игры между подходящими командами. Этих игр всего $s(s-1)/2$, и в каждой из них одна из s подходящих команд проиграла. Опять же по принципу Дирихле, одна из подходящих команд проиграла не менее, чем $\dfrac{s(s-1)}{2} : s = \dfrac{s-1}{2} \geqslant \dfrac{11}{2}$ другим подходящим командам. Значит, одна из подходящих команд проиграла хотя бы шести командам, что невозможно. Полученное противоречие доказывает лемму. $\square$

Для решения задачи покажем индукцией по $k = 55,\ 56,\ \ldots,\ 110$, что среди любых k команд найдётся одна, которая проиграла не более, чем четырём из остальных $k-1$ команд. База при $k=55$ верна по условию, а переход доказан в лемме. Значит, это утверждение верно при $k=110$, что и требовалось.

11.4. Дано натуральное число $N \geqslant 3$. Назовём набор из N точек на координатной плоскости *допустимым*, если их абсциссы различны, и каждая из этих точек окрашена либо в красный, либо в синий цвет. Будем говорить, что многочлен $P(x)$ *разделяет* допустимый набор точек, если либо выше графика $P(x)$ нет красных точек, а ниже — нет синих, либо наоборот (на самом графике могут лежать точки обоих цветов). При каком наименьшем k любой допустимый набор из N точек можно разделить многочленом степени не более k? (*К. Тыщук*)

Ответ. $k=N-2$.

Решение. Докажем, что $k=N-2$ подходит. Возьмем произвольные $N-1$ из данных N точек; существует многочлен степени, не большей $N-2$, график которого проходит через них. Этот многочлен, очевидно, разделяет наши точки.

Осталось построить пример допустимого набора, который нельзя разделить многочленом степени, меньшей $N-2$. Возьмем график некоторого приведённого многочлена $f(x)$ степени $N-2$ и расположим на нем N точек, чередуя цвета. Предположим, что некоторый многочлен $P(x)$, степень которого не больше $N-3$, разделяет эти точки; можно считать, что ниже графика $P(x)$ нет красных точек, а выше — синих.

Обозначим $Q(x)=f(x)-P(x)$; степень многочлена $Q(x)$ равна $N-2 \geqslant 1$. Кроме того, если r и b — абсциссы произвольных красной и синей точек, то $P(r) \leqslant f(r)$ и $P(b) \geqslant f(b)$, то есть $Q(r) \geqslant 0$ и $Q(b) \leqslant 0$.

Заметим, что если $Q(s) \leqslant Q(t)$ при некоторых $s<t$, то существует такая точка $u \in (s,t)$, для которой $Q'(u)>0$ (здесь использовано, что $Q(x)$ непостоянен). Это значит, что на любом интервале между красной и синей точками (красная левее синей) найдется точка, в которой значение $Q'(x)$ положительно. Аналогично, на любом интервале между синей и красной точками найдется точка, в которой значение $Q'(x)$ отрицательно. Итого, мы нашли $N-1$ точек, в которых $Q'(x)$ принимает значения чередующихся знаков. Между любыми такими соседними точками $Q'(x)$ имеет корень. Следовательно, у многочлена $Q'(x)$ не менее $N-2$ корней. Но это невозможно, так как $Q'(x)$ — многочлен степени $N-3$. Противоречие.

Замечание. Немного изменив рассуждения, можно показать, что в качестве $f(x)$ можно взять любую функцию, у которой $(N-2)$-я производная не имеет корней; подойдёт, например, $f(x)=2^x$. Действительно, из того, что у $Q'(x)$ не меньше $N-2$ корней, следует, что у $(N-2)$-й производной функции $Q(x)$ не менее одного корня; но $Q^{(N-2)}(x) = f^{(N-2)}(x) - P^{(N-2)}(x) = f^{(N-2)}(x)$. Противоречие.