# 9 класс

## Первый день

9.1. Числа $a$ и $b$ таковы, что каждый из двух квадратных трёхчленов $x^2+ax+b$ и $x^2+bx+a$ имеет по два различных корня, а произведение этих трёхчленов имеет ровно три различных корня. Найдите все возможные значения суммы этих трёх корней.

9.2. Параллелограмм $ABCD$ таков, что $\angle B < 90^\circ$ и $AB < BC$. Точки $E$ и $F$ выбраны на окружности $\omega$, описанной около треугольника $ABC$, так, что касательные к $\omega$ в этих точках проходят через $D$. Оказалось, что $\angle EDA = \angle FDC$. Найдите угол $ABC$.

9.3. Натуральные числа $a$, $x$ и $y$, большие 100, таковы, что $y^2 - 1 = a^2(x^2-1)$. Какое наименьшее значение может принимать дробь $a/x$?

9.4. В волейбольном турнире участвовали 110 команд, каждая сыграла с каждой из остальных ровно одну игру (в волейболе не бывает ничьих). Оказалось, что в любой группе из 55 команд найдётся одна, которая проиграла не более, чем четырём из остальных 54 команд этой группы. Докажите, что во всём турнире найдётся команда, проигравшая не более, чем четырём из остальных 109 команд.

XLI Всероссийская математическая олимпиада школьников

9 класс

Первый день

9.1. Числа $a$ и $b$ таковы, что каждый из двух квадратных трёхчленов $x^2+ax+b$ и $x^2+bx+a$ имеет по два различных корня, а произведение этих трёхчленов имеет ровно три различных корня. Найдите все возможные значения суммы этих трёх корней.

9.2. Параллелограмм $ABCD$ таков, что $\angle B < 90^\circ$ и $AB < BC$. Точки $E$ и $F$ выбраны на окружности $\omega$, описанной около треугольника $ABC$, так, что касательные к $\omega$ в этих точках проходят через $D$. Оказалось, что $\angle EDA = \angle FDC$. Найдите угол $ABC$.

9.3. Натуральные числа $a$, $x$ и $y$, большие 100, таковы, что $y^2 - 1 = a^2(x^2-1)$. Какое наименьшее значение может принимать дробь $a/x$?

9.4. В волейбольном турнире участвовали 110 команд, каждая сыграла с каждой из остальных ровно одну игру (в волейболе не бывает ничьих). Оказалось, что в любой группе из 55 команд найдётся одна, которая проиграла не более, чем четырём из остальных 54 команд этой группы. Докажите, что во всём турнире найдётся команда, проигравшая не более, чем четырём из остальных 109 команд.

# 10 класс

## Первый день

10.1. Назовём натуральное число *почти квадратом*, если оно равно произведению двух последовательных натуральных чисел. Докажите, что каждый почти квадрат можно представить в виде частного двух почти квадратов.

10.2. Дан параллелограмм $ABCD$, в котором $AB < AC < BC$. Точки $E$ и $F$ выбраны на окружности $\omega$, описанной около треугольника $ABC$, так, что касательные к $\omega$ в этих точках проходят через $D$; при этом отрезки $AD$ и $CE$ пересекаются. Оказалось, что $\angle ABF = \angle DCE$. Найдите угол $ABC$.

10.3. На соревнованиях по фигурному велосипедированию было 100 судей. Каждый судья упорядочил всех участников (от лучшего по его мнению — к худшему). Оказалось, что ни для каких трёх участников $A$, $B$, $C$ не нашлось трёх судей, один из которых считает, что $A$ — лучший из трёх, а $B$ — худший, другой — что $B$ лучший, а $C$ худший, а третий — что $C$ лучший, а $A$ худший. Докажите, что можно составить общий рейтинг участников так, чтобы для любых двух участников $A$ и $B$ тот, кто выше в рейтинге, был бы лучше другого по мнению хотя бы половины судей.

10.4. Обозначим через $S(k)$ сумму цифр натурального числа $k$. Натуральное число $a$ назовём *$n$-хорошим*, если существует такая последовательность натуральных чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n$, что $a_n = a$ и $a_{i+1} = a_i - S(a_i)$ при всех $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Верно ли, что для любого натурального $n$ существует натуральное число, являющееся $n$-хорошим, но не являющееся $(n+1)$-хорошим?

XLI Всероссийская математическая олимпиада школьников

10 класс

Первый день

10.1. Назовём натуральное число *почти квадратом*, если оно равно произведению двух последовательных натуральных чисел. Докажите, что каждый почти квадрат можно представить в виде частного двух почти квадратов.

10.2. Дан параллелограмм $ABCD$, в котором $AB < AC < BC$. Точки $E$ и $F$ выбраны на окружности $\omega$, описанной около треугольника $ABC$, так, что касательные к $\omega$ в этих точках проходят через $D$; при этом отрезки $AD$ и $CE$ пересекаются. Оказалось, что $\angle ABF = \angle DCE$. Найдите угол $ABC$.

10.3. На соревнованиях по фигурному велосипедированию было 100 судей. Каждый судья упорядочил всех участников (от лучшего по его мнению — к худшему). Оказалось, что ни для каких трёх участников $A$, $B$, $C$ не нашлось трёх судей, один из которых считает, что $A$ — лучший из трёх, а $B$ — худший, другой — что $B$ лучший, а $C$ худший, а третий — что $C$ лучший, а $A$ худший. Докажите, что можно составить общий рейтинг участников так, чтобы для любых двух участников $A$ и $B$ тот, кто выше в рейтинге, был бы лучше другого по мнению хотя бы половины судей.

10.4. Обозначим через $S(k)$ сумму цифр натурального числа $k$. Натуральное число $a$ назовём *$n$-хорошим*, если существует такая последовательность натуральных чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n$, что $a_n = a$ и $a_{i+1} = a_i - S(a_i)$ при всех $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Верно ли, что для любого натурального $n$ существует натуральное число, являющееся $n$-хорошим, но не являющееся $(n+1)$-хорошим?

# 11 класс

## Первый день

11.1. Параллелограмм $ABCD$ таков, что $\angle B < 90^\circ$ и $AB < BC$. Точки $E$ и $F$ выбраны на окружности $\omega$, описанной около треугольника $ABC$, так, что касательные к $\omega$ в этих точках проходят через $D$. Оказалось, что $\angle EDA = \angle FDC$. Найдите угол $ABC$.

11.2. Пусть $n > 1$ — натуральное число. Выпишем дроби $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, …, $\frac{n-1}{n}$ и приведём каждую к несократимому виду; сумму числителей полученных дробей обозначим через $f(n)$. При каких натуральных $n > 1$ числа $f(n)$ и $f(2015n)$ имеют разную чётность?

11.3. В волейбольном турнире участвовали 110 команд, каждая сыграла с каждой из остальных ровно одну игру (в волейболе не бывает ничьих). Оказалось, что в любой группе из 55 команд найдётся одна, которая проиграла не более, чем четырём из остальных 54 команд этой группы. Докажите, что во всём турнире найдётся команда, проигравшая не более, чем четырём из остальных 109 команд.

11.4. Дано натуральное число $N \geqslant 3$. Назовём набор из $N$ точек на координатной плоскости *допустимым*, если их абсциссы различны, и каждая из этих точек окрашена либо в красный, либо в синий цвет. Будем говорить, что многочлен $P(x)$ *разделяет* допустимый набор точек, если либо выше графика $P(x)$ нет красных точек, а ниже — нет синих, либо наоборот (на самом графике могут лежать точки обоих цветов). При каком наименьшем $k$ любой допустимый набор из $N$ точек можно разделить многочленом степени не более $k$?

XLI Всероссийская математическая олимпиада школьников

# 11 класс

## Первый день

11.1. Параллелограмм $ABCD$ таков, что $\angle B < 90^\circ$ и $AB < BC$. Точки $E$ и $F$ выбраны на окружности $\omega$, описанной около треугольника $ABC$, так, что касательные к $\omega$ в этих точках проходят через $D$. Оказалось, что $\angle EDA = \angle FDC$. Найдите угол $ABC$.

11.2. Пусть $n > 1$ — натуральное число. Выпишем дроби $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, …, $\frac{n-1}{n}$ и приведём каждую к несократимому виду; сумму числителей полученных дробей обозначим через $f(n)$. При каких натуральных $n > 1$ числа $f(n)$ и $f(2015n)$ имеют разную чётность?

11.3. В волейбольном турнире участвовали 110 команд, каждая сыграла с каждой из остальных ровно одну игру (в волейболе не бывает ничьих). Оказалось, что в любой группе из 55 команд найдётся одна, которая проиграла не более, чем четырём из остальных 54 команд этой группы. Докажите, что во всём турнире найдётся команда, проигравшая не более, чем четырём из остальных 109 команд.

11.4. Дано натуральное число $N \geqslant 3$. Назовём набор из $N$ точек на координатной плоскости *допустимым*, если их абсциссы различны, и каждая из этих точек окрашена либо в красный, либо в синий цвет. Будем говорить, что многочлен $P(x)$ *разделяет* допустимый набор точек, если либо выше графика $P(x)$ нет красных точек, а ниже — нет синих, либо наоборот (на самом графике могут лежать точки обоих цветов). При каком наименьшем $k$ любой допустимый набор из $N$ точек можно разделить многочленом степени не более $k$?