

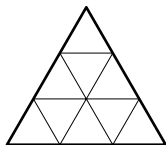
9 класс

Первый день

9.1. За круглым столом сидят 2015 человек, каждый из них — либо рыцарь, либо лжец. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Им раздали по одной карточке, на каждой карточке написано по числу; при этом все числа на карточках различны. Посмотрев на карточки соседей, каждый из сидящих за столом сказал: «Мое число больше, чем у каждого из двух моих соседей». После этого k из сидящих сказали: «Мое число меньше, чем у каждого из двух моих соседей». При каком наибольшем k это могло случиться?

9.2. Назовём натуральное число *интересным*, если сумма его цифр — простое число. Какое наибольшее количество интересных чисел может быть среди пяти подряд идущих натуральных чисел?

9.3. Правильный треугольник со стороной 3 разбит на девять треугольных клеток, как показано на рисунке. В этих клетках изначально записаны нули. За один ход можно выбрать два числа, находящиеся в соседних по стороне клетках, и либо прибавить к обоим по единице, либо вычесть из обоих по единице. Петя хочет сделать несколько ходов так, чтобы после этого в клетках оказались записаны в некотором порядке последовательные натуральные числа $n, n + 1, \dots, n + 8$. При каких n он сможет это сделать?



9.4. В неравностороннем треугольнике ABC провели биссектрисы угла ABC и угла, смежного с ним. Они пересекли прямую AC в точках B_1 и B_2 соответственно. Из точек B_1 и B_2 провели касательные к окружности, вписанной в треугольник ABC , отличные от прямой AC . Они касаются этой окружности в точках K_1 и K_2 соответственно. Докажите, что точки B, K_1 и K_2 лежат на одной прямой.

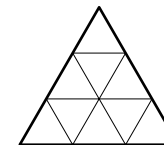
9 класс

Первый день

9.1. За круглым столом сидят 2015 человек, каждый из них — либо рыцарь, либо лжец. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Им раздали по одной карточке, на каждой карточке написано по числу; при этом все числа на карточках различны. Посмотрев на карточки соседей, каждый из сидящих за столом сказал: «Мое число больше, чем у каждого из двух моих соседей». После этого k из сидящих сказали: «Мое число меньше, чем у каждого из двух моих соседей». При каком наибольшем k это могло случиться?

9.2. Назовём натуральное число *интересным*, если сумма его цифр — простое число. Какое наибольшее количество интересных чисел может быть среди пяти подряд идущих натуральных чисел?

9.3. Правильный треугольник со стороной 3 разбит на девять треугольных клеток, как показано на рисунке. В этих клетках изначально записаны нули. За один ход можно выбрать два числа, находящиеся в соседних по стороне клетках, и либо прибавить к обоим по единице, либо вычесть из обоих по единице. Петя хочет сделать несколько ходов так, чтобы после этого в клетках оказались записаны в некотором порядке последовательные натуральные числа $n, n + 1, \dots, n + 8$. При каких n он сможет это сделать?



9.4. В неравностороннем треугольнике ABC провели биссектрисы угла ABC и угла, смежного с ним. Они пересекли прямую AC в точках B_1 и B_2 соответственно. Из точек B_1 и B_2 провели касательные к окружности, вписанной в треугольник ABC , отличные от прямой AC . Они касаются этой окружности в точках K_1 и K_2 соответственно. Докажите, что точки B, K_1 и K_2 лежат на одной прямой.

10 класс

Первый день

- 10.1. Целые числа $a, x_1, x_2, \dots, x_{13}$ таковы, что $a = (1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_{13}) = (1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_{13})$. Докажите, что $ax_1x_2\dots x_{13} = 0$.
- 10.2. На плоскости отметили все вершины правильного n -угольника, а также его центр. Затем нарисовали контур этого n -угольника, и центр соединили со всеми вершинами; в итоге n -угольник разбился на n треугольников. Вася записал в каждую отмеченную точку по числу (среди чисел могут быть равные). В каждый треугольник разбиения он записал в произвольном порядке три числа, стоящих в его вершинах; после этого он стёр числа в отмеченных точках. При каких n по тройкам чисел, записанным в треугольниках, Петя всегда сможет восстановить число в каждой отмеченной точке?
- 10.3. Пусть AL — биссектриса треугольника ABC . Серединный перпендикуляр к отрезку AL пересекает окружность, описанную около треугольника ABC , в точках P и Q . Докажите, что окружность, описанная около треугольника PLQ , касается стороны BC .
- 10.4. Положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению $ab + bc + ca = 1$. Докажите, что

$$\sqrt{a + \frac{1}{a}} + \sqrt{b + \frac{1}{b}} + \sqrt{c + \frac{1}{c}} \geq 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}).$$

10 класс

Первый день

- 10.1. Целые числа $a, x_1, x_2, \dots, x_{13}$ таковы, что $a = (1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_{13}) = (1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_{13})$. Докажите, что $ax_1x_2\dots x_{13} = 0$.
- 10.2. На плоскости отметили все вершины правильного n -угольника, а также его центр. Затем нарисовали контур этого n -угольника, и центр соединили со всеми вершинами; в итоге n -угольник разбился на n треугольников. Вася записал в каждую отмеченную точку по числу (среди чисел могут быть равные). В каждый треугольник разбиения он записал в произвольном порядке три числа, стоящих в его вершинах; после этого он стёр числа в отмеченных точках. При каких n по тройкам чисел, записанным в треугольниках, Петя всегда сможет восстановить число в каждой отмеченной точке?
- 10.3. Пусть AL — биссектриса треугольника ABC . Серединный перпендикуляр к отрезку AL пересекает окружность, описанную около треугольника ABC , в точках P и Q . Докажите, что окружность, описанная около треугольника PLQ , касается стороны BC .
- 10.4. Положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению $ab + bc + ca = 1$. Докажите, что

$$\sqrt{a + \frac{1}{a}} + \sqrt{b + \frac{1}{b}} + \sqrt{c + \frac{1}{c}} \geq 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}).$$

11 класс

Первый день

- 11.1. Целые числа $a, x_1, x_2, \dots, x_{13}$ таковы, что $a = (1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_{13}) = (1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_{13})$. Докажите, что $ax_1x_2\dots x_{13} = 0$.
- 11.2. На новогодний вечер пришли несколько супружеских пар, у каждой из которых было от 1 до 10 детей. Дед Мороз выбирал одного ребенка, одну маму и одного папу из трёх разных семей и катал их в санях. Оказалось, что у него было ровно 3630 способов выбрать нужную тройку людей. Сколько всего могло быть детей на этом вечере?
- 11.3. Продолжения медиан AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекают его описанную окружность в точках A_0, B_0 и C_0 соответственно. Оказалось, что площади треугольников ABC_0, AB_0C и A_0BC равны. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.
- 11.4. Положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению $ab + bc + ca = 1$. Докажите, что

$$\sqrt{a + \frac{1}{a}} + \sqrt{b + \frac{1}{b}} + \sqrt{c + \frac{1}{c}} \geq 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}).$$

11 класс

Первый день

- 11.1. Целые числа $a, x_1, x_2, \dots, x_{13}$ таковы, что $a = (1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_{13}) = (1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_{13})$. Докажите, что $ax_1x_2\dots x_{13} = 0$.
- 11.2. На новогодний вечер пришли несколько супружеских пар, у каждой из которых было от 1 до 10 детей. Дед Мороз выбирал одного ребенка, одну маму и одного папу из трёх разных семей и катал их в санях. Оказалось, что у него было ровно 3630 способов выбрать нужную тройку людей. Сколько всего могло быть детей на этом вечере?
- 11.3. Продолжения медиан AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекают его описанную окружность в точках A_0, B_0 и C_0 соответственно. Оказалось, что площади треугольников ABC_0, AB_0C и A_0BC равны. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.
- 11.4. Положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению $ab + bc + ca = 1$. Докажите, что

$$\sqrt{a + \frac{1}{a}} + \sqrt{b + \frac{1}{b}} + \sqrt{c + \frac{1}{c}} \geq 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}).$$