Материалы для проведения заключительного этапа

XLIII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2016–2017 учебный год

Первый день

Калининград, 24–30 апреля 2017 г.

Москва, 2017

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа XLIII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, Д. А. Белов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, С. Г. Волчёнков, М. А. Григорьев, М. А. Дидин, О. Ю. Дмитриев, В. Л. Дольников, С. А. Дориченко, Л. А. Емельянов, Г. К. Жуков, М. П. Каленков, Д. В. Карпов, К. А. Кноп, П. А. Кожевников, П. Ю. Козлов, С. О. Кудря, А. С. Кузнецов, Ю. В. Кузьменко, Е. Г. Молчанов, О. С. Нечаева, А. В. Пастор, О. К. Подлипский, И. С. Рубанов, К. А. Сухов, Д. А. Терёшин, С. И. Токарев, А. Д. Труфанов, Б. В. Трушин, М. А. Фадин, И. И. Фролов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков, В. З. Шарич. О. И. Южаков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Компьютерный макет: И. И. Богданов.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Запрещается публикация или размещение в сети Интернет условий или решений задач олимпиады.

Условия и решения задач

9 класс

9.1. В стране некоторые пары городов соединены односторонними прямыми авиарейсами (между любыми двумя городами есть не более одного рейса). Скажем, что город A *доступен* для города B, если из B можно долететь в A, возможно, с пересадками. Известно, что для любых двух городов P и Q существует город R, для которого и P, и Q доступны. Докажите, что существует город, для которого доступны все города страны. (Считается, что из города можно долететь до него самого.) (*В. Дольников*)

Первое решение. Перенумеруем все города страны как $A_1, A_2, \ldots, A_n$. По условию, существует город B_2, для которого доступны города A_1 и A_2. Далее, города A_3 и B_2 доступны для какого-то города B_3. Поскольку из B_2 можно добраться до A_1 и A_2, они также доступны для B_3. Продолжая такие же рассуждения, мы получим в конце, что существует город B_n, для которого доступны города A_n и B_{n-1}. Тогда для B_n будут доступны и города $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, так как до них можно долететь с пересадкой в B_{n-1}.

Второе решение. Рассмотрим город A, для которого доступно наибольшее количество городов (если таких несколько — любой из них). Предположим, что некоторый город B недоступен для A. Тогда по условию существует город C, для которого и A, и B доступны. Но тогда для C доступны B, а также все города, доступные для A. Это противоречит выбору A; значит, для A доступны все города.

9.2. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD. Окружность ω проходит через вершины B и C и вторично пересекает сторону AB и диагональ BD в точках X и Y соответственно. Касательная, проведенная к окружности ω в точке C, пересекает луч AD в точке Z. Докажите, что точки X, Y и Z лежат на одной прямой. (*А. Кузнецов*)

Решение. Поскольку $BC \parallel AD$, а прямая ZC касается окружности ω, имеем $\angle ADB = \angle YBC = \angle YCZ$. Следовательно, $\angle YDZ + \angle YCZ = 180^\circ$, то есть четырёхугольник $CYDZ$ — вписанный (см. рис. 1).

Значит, $\angle CYZ = \angle CDZ = \angle XBC = 180^\circ - \angle CYX$, где последние два равенства следуют из того, что трапеция $ABCD$ равнобокая, а четырёхугольник $XBCY$ вписан в ω. Таким образом, $\angle CYZ + \angle CYX = 180^\circ$, поэтому точки X, Y и Z лежат на одной прямой.

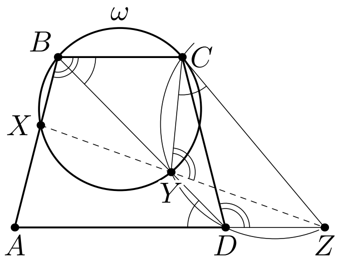

Рис. 1

9.3. Сто гномов, веса которых равны 1, 2, 3, ..., 100 фунтов, собрались на левом берегу реки. Плавать они не умеют, но на этом же берегу находится гребная лодка грузоподъемностью 100 фунтов. Из-за течения плыть обратно трудно, поэтому у каждого гнома хватит сил грести с правого берега на левый не более одного раза (грести в лодке достаточно любому из гномов; гребец в течение одного рейса не меняется). Могут ли все гномы переправиться на правый берег? (*А. Шаповалов, С. Усов*)

Ответ. Нет.

Первое решение. Предположим, что переправа гномам удалась. Назовём рейсы лодки с левого берега на правый *прямыми*, а с правого на левый — *обратными*. Пусть было k обратных рейсов; тогда прямых рейсов было $k+1$.

В k обратных рейсах гребли k разных гномов; значит, суммарный вес гномов, участвовавших в обратных рейсах, не меньше $1+2+\ldots+k = \frac{k(k+1)}{2}$ (здесь и далее все веса измеряются в фунтах). На любом прямом рейсе суммарный вес гномов не превосходит 100, так что в итоге суммарный вес гномов на левом берегу уменьшился не более, чем на $100(k+1) - \frac{k(k+1)}{2} = \frac{(200-k)(k+1)}{2}$. С другой стороны, этот вес уменьшился на $1+2+\ldots+100 = \frac{100\cdot 101}{2}$, откуда

$$(200-k)(k+1) \geqslant 100\cdot 101, \quad \text{или} \quad (k-100)(k-99) \leqslant 0.$$

Это может случиться лишь если $k=99$ или $k=100$. При этом неравенство обращается в равенство; это значит, что в k обратных рейсах участвовали только гномы весами $1, 2, \ldots, k$ — каждый по одному разу, а на каждом прямом рейсе суммарный вес гномов был равен 100.

Ясно, что гном весом 100 совершал все свои рейсы (один рейс при $k = 99$ и три при $k = 100$) в одиночку; рассмотрим теперь только остальных (*обычных*) гномов и их рейсы (их ровно 99 прямых и 99 обратных в любом случае). В каждом из прямых рейсов участвовало хотя бы 2 обычных гнома; значит, общее количество обычных гномов на правом берегу увеличилось как минимум на $99 \cdot 2 - 99 = 99$. Это неравенство также обращается в равенство, так что на каждом прямом рейсе участвовало ровно два гнома. Но тогда гном веса 50 должен был плыть с гномом веса 50, а второго такого нет. Противоречие.

Замечание. На последнем шаге решения можно действовать и по-другому. Мы получили, что все гномы с весами 1, 2, ..., 99 совершили по два прямых рейса, и на каждом из них суммарный вес был равен 100. Это значит, что гном веса 99 оба прямых рейса совершал с гномом веса 1, гном веса 98 — с гномом веса 2, и т.д. Но тогда гному веса 50 не с кем было совершать свои прямые рейсы.

Второе решение. Мы также предполагаем противное. Воспользуемся терминологией, введённой в начале предыдущего решения.

Назовём гномов с весами 50, 51, 52, ..., 100 *тяжёлыми*, а остальных — *лёгкими*. Пусть тяжёлые гномы были гребцами в d обратных рейсах. Тогда эти d тяжёлых гномов совершили хотя бы по два прямых рейса, а остальные — хотя бы по одному. Поскольку два тяжёлых гнома не могли плыть одновременно, количество прямых рейсов было не меньше, чем $2d + (51 - d) = 51 + d$. Значит, обратных рейсов было не меньше, чем $50 + d$, то есть хотя бы в 50 из них гребцами были лёгкие гномы. Но лёгких гномов всего 49, так что один из них должен был дважды грести в обратном рейсе, что невозможно.

9.4. Существует ли такая бесконечная возрастающая последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ натуральных чисел, что сумма любых двух различных членов последовательности взаимно проста с суммой любых трёх различных членов последовательности? (*С. Берлов*)

Ответ. Да, существует.

Решение. Построим пример такой последовательности. Положим $a_1 = 1$, $a_2 = 7$, $a_{n+1} = (3a_n)! + 1$. Для того, чтобы показать, что она удовлетворяет требованиям, нам придётся эти требования несколько усилить. Будем говорить, что пара (тройка) чисел *хорошая*, если все её элементы, отличные от единицы, различны (а единица может встретиться в ней несколько раз). Докажем следующее утверждение, из которого будет следовать, что построенная последовательность — требуемая.

Пусть (a_i, a_j) и (a_p, a_q, a_r) — хорошие пара и тройка элементов последовательности. Тогда

$$\textit{НОД}(a_i + a_j, a_p + a_q + a_r) = \textit{НОД}(a_i + a_j, a_p + a_q - a_r) = 1.$$

Доказательство проведём индукцией по наибольшему индексу m среди i, j, p, q и r. Если $m = 1$, утверждение тривиально. Для перехода предположим, что $m > 1$. Число a_m лежит либо только в паре (a_i, a_j), либо только в тройке (a_p, a_q, a_r), либо в обеих.

Случай 1. Пусть a_m — только элемент пары; скажем, $a_m = a_j$. Тогда, поскольку $0 < |a_p + a_q \pm a_r| \leqslant 3a_{m-1}$, число $a_m - 1 = (3a_{m-1})!$ делится на $a_p + a_q \pm a_r$, то есть $\text{НОД}(a_i + a_m, a_p + a_q \pm a_r) = \text{НОД}((a_i + 1) + (a_m - 1), a_p + a_q \pm a_r) = \text{НОД}(a_i + a_1, a_p + a_q \pm a_r) = 1$ по предположению индукции.

Случай 2. Пусть a_m — только элемент тройки; скажем, $a_m = a_q$. Аналогично, $a_m - 1$ делится на $a_i + a_j$, так что $\text{НОД}(a_i + a_j, a_p + a_m \pm a_r) = \text{НОД}(a_i + a_j, a_p + a_1 \pm a_r) = 1$ по предположению индукции.

Случай 3. Пусть a_m — элемент и пары, и тройки; скажем, $a_m = a_j = a_q$. Тогда $a_m - 1$ делится на $a_p - a_i \pm a_r$, так что $\text{НОД}(a_i + a_m, a_p + a_m \pm a_r) = \text{НОД}(a_i + a_m, (a_p + a_m \pm a_r) - (a_i + a_m)) = \text{НОД}(a_i + a_m, a_p - a_i \pm a_r) = \text{НОД}(a_i + a_1, a_p - a_i \pm a_r) = 1$ по предположению индукции. Переход индукции доказан.

10 класс

10.1. На координатной плоскости нарисованы графики двух приведённых квадратных трёхчленов и две непараллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2. Известно, что отрезки, высекаемые графиками на ℓ_1, равны, и отрезки, высекаемые графиками на ℓ_2, также равны. Докажите, что графики трёхчленов совпадают. (*А. С. Голованов*)

Первое решение. Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — данные приведённые квадратные трёхчлены, а параболы Γ_1 и Γ_2 — их графики. Тогда существует единственный вектор $\overrightarrow{a}$ такой, что при параллельном переносе на этот вектор парабола Γ_1 переходит в Γ_2 (вектор $\overrightarrow{a}$ соединяет вершины парабол).

Пусть прямая ℓ_1 пересекает Γ_1 в точках A_1 и B_1, а Γ_2 — в точках A_2 и B_2 так, что $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2}$. При параллельном переносе параболы Γ_1 на вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ получается парабола Γ_3, являющаяся графиком приведенного трёхчлена $f_3(x)$, которая пересекает ℓ_1 в тех же точках, что и Γ_2. Тогда разность $f_2(x) - f_3(x)$ имеет хотя бы два корня (абсциссы точек A_2 и B_2). Но, поскольку степень многочлена $f_2(x) - f_3(x)$ не выше 1, то $f_2(x) - f_3(x) \equiv 0$, то есть $\Gamma_3 = \Gamma_2$. Значит, вектор сдвига $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{A_1A_2}$ параллелен прямой ℓ_1.

Аналогично, $\overrightarrow{a} \parallel \ell_2$, тем самым $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ и $\Gamma_1 = \Gamma_2$.

Второе решение. Пусть $f_1(x) = x^2 + p_1x + q_1$ и $f_2(x) = x^2 + p_2x + q_2$ — данные квадратные трёхчлены, Γ_1 и Γ_2 — их графики, а $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ — уравнения прямых ℓ_1 и ℓ_2 соответственно.

Заметим, что длина отрезка, высекаемого параболой $y = x^2 + px + q$ на прямой $y = kx + b$, равна модулю разности корней уравнения $x^2 + px + q = kx + b$, делённому на косинус угла наклона прямой $y = kx + b$. При этом модуль разности корней приведённого квадратного трёхчлена равен корню из его дискриминанта. Значит, условие того, что Γ_1 и Γ_2 высекают на ℓ_1 равные отрезки, записывается как

$$(p_1 - k_1)^2 - 4(q_1 - b_1) = (p_2 - k_1)^2 - 4(q_2 - b_1).$$

Преобразуя это равенство, получаем $(p_1 - p_2)(p_1 + p_2 - 2k_1) = 4(q_1 - q_2)$. Если $p_1 = p_2$, то $q_1 = q_2$ и задача решена. Иначе

$$k_1 = \frac{p_1 + p_2}{2} - \frac{2(q_1 - q_2)}{p_1 - p_2}\,.$$

Точно те же рассуждения можно провести и для прямой ℓ_2. Итак, если параболы не совпадают, то $k_1 = k_2$, то есть $\ell_1 \parallel \ell_2$, что невозможно по условию.

10.2. Остроугольный равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$) вписан в окружность с центром в точке O. Лучи BO и CO пересекают стороны AC и AB в точках B' и C' соответственно. Через точку C' проведена прямая ℓ, параллельная прямой AC. Докажите, что прямая ℓ касается окружности, описанной около треугольника $B'OC$. (*А. Кузнецов*)

Решение. Пусть прямая AO пересекает ℓ в точке T (см. рис. 2). Из симметрии относительно AO имеем $\angle B'TO = \angle C'TO$. Поскольку $\ell \parallel AC$, получаем $\angle C'TO = \angle OAC = \angle OCA$. Итак, $\angle B'TO = \angle B'CO$, то есть T лежит на окружности ω, описанной около треугольника $B'OC$. Кроме того, из тех же соображений имеем $\angle OB'T = \angle OC'T = \angle OCA = \angle OTC'$, то есть $C'T$ касается ω в точке T.

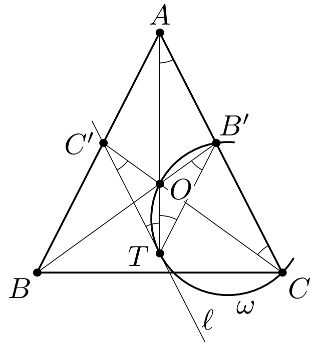

Рис. 2

Замечание. Можно заметить, что O и T — центры окружностей, описанных около треугольника $B'C'T$ и трапеции $BCB'C'$ соответственно.

10.3. Изначально на столе лежат три кучки из 100, 101 и 102 камней соответственно. Илья и Костя играют в следующую игру. За один ход каждый из них может взять себе один камень из любой кучи, кроме той, из которой он брал камень на своем предыдущем ходе (на своём первом ходе каждый игрок может брать камень из любой кучки). Ходы игроки делают по очереди, начинает Илья. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник? (*Д. Белов, И. Богданов, К. Кноп*)

Ответ. Илья.

Решение. Покажем, как Илье ходить, чтобы гарантированно выиграть. Обозначим через A, B и C кучки, в которых изначально было 100, 101 и 102 камня соответственно. Первым ходом Илья возьмёт камень из кучки B. Далее возможны два случая.

Случай 1. Своим первым ходом Костя возьмёт камень не из кучки B. Тогда Илья всегда будет повторять ход за Костей, то есть брать камень из той же кучки, из которой только что брал камень Костя. Заметим, что, пока Илья действует по этой стратегии, после любого его хода в каждой кучке остаётся чётное число камней.

Свой второй ход Илья сможет сделать, так как Костя взял свой первый камень не из B. После этого каждым ходом Костя будет брать камень из кучки X, отличной от кучки Y, из которой только что взял Илья. Тогда в X останется нечётное число камней, и Илья сможет взять из X ещё один камень. Значит, действуя по этой стратегии, Илья всегда сможет сделать ход после хода Кости. Поскольку игра рано или поздно закончится, Костя проиграет.

Случай 2. Своим первым ходом Костя возьмёт камень из кучки B. В этом случае Илья будет действовать по следующей стратегии. Если перед текущим ходом Ильи Костя брал камень из кучки C, то Илья берёт камень оттуда же. Если же Костя брал камень из кучки A или B, то Илья берёт камень из кучки B или A соответственно. Заметим, что, пока Илья действует по этой стратегии, после любого его хода в C будет чётное число камней, а в A и B камней будет поровну.

Опять же, нам достаточно показать, что Илья всегда сможет сделать ход согласно этой стратегии. Свой второй ход Илья сделать сможет (взяв камень из A). Если на очередном шаге ему нужно брать камень из кучки C, то до этого оттуда брал камень Костя, значит, на предыдущем ходу оба игрока не брали ничего из C. При этом после хода Кости там нечётное число камней, поэтому Илья может взять камень из C. Если же Илье нужно брать камень из кучки A или B, скажем, из A, то Костя только что взял камень из B (и, значит, в A ещё есть камень). Значит, на предыдущем шаге Костя не мог брать камень из B, поэтому Илья не брал камень из A, то есть он может взять камень оттуда на текущем шаге.

Замечание. Стратегия, описанная в случае 2, также работает, если Костя своим первым ходом возьмёт камень из C.

10.4. На доске выписаны в ряд n положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Вася хочет выписать под каждым числом a_i число $b_i \geqslant a_i$ так, чтобы для любых двух из чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ отношение одного из них к другому было целым. Докажите, что Вася может выписать требуемые числа так, чтобы выполнялось неравенство $b_1 b_2 \ldots b_n \leqslant 2^{(n-1)/2} a_1 a_2 \ldots a_n$. (*Ф. Петров*)

Решение. Мы докажем, что существуют даже числа b_1, b_2, $\ldots$, b_n, удовлетворяющие следующим (более сильным) условиям:

(1) $b_i \geqslant a_i$ при всех $i \leqslant n$;

(2) $b_1 b_2 \ldots b_n \leqslant 2^{(n-1)/2} a_1 a_2 \ldots a_n$;

(3) отношение любых двух из чисел b_i является степенью двойки (с целым показателем).

Заметим, что доказываемое утверждение не изменится, если какое-то из чисел a_k (а с ним и соответствующее b_k) умножить на некоторую степень двойки. Умножим каждое из чисел a_k на степень двойки так, чтобы все полученные числа лежали в промежутке $[1, 2)$.

Не умаляя общности можно считать, что $1 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n < 2$. Покажем теперь, что одна из следующих n последовательностей удовлетворяет всем трём условиям:

$$\begin{array}{lllllll}
a_1, & 2a_1, & 2a_1, & 2a_1, & \ldots, & 2a_1, & 2a_1; \\
a_2, & a_2, & 2a_2, & 2a_2, & \ldots, & 2a_2, & 2a_2; \\
a_3, & a_3, & a_3, & 2a_3, & \ldots, & 2a_3, & 2a_3; \\
 & & & \cdots & & & \\
a_{n-1}, & a_{n-1}, & a_{n-1}, & a_{n-1}, & \ldots, & a_{n-1}, & 2a_{n-1}; \\
a_n, & a_n, & a_n, & a_n, & \ldots, & a_n, & a_n.
\end{array}$$

Поскольку для любых k и ℓ выполнено неравенство $2a_\ell \geqslant 2 > a_k$, каждая из последовательностей удовлетворяет (1). Кроме того, каждая из последовательностей, очевидно, удовлетворяет (3). Осталось показать, что хотя бы одна из них удовлетворяет (2).

Для этого заметим, что произведение всех n^2 чисел во всех

n последовательностях равно

$$2^{(n-1)+(n-2)+\ldots+0} \cdot a_1^n a_2^n \ldots a_n^n = \left(2^{(n-1)/2} a_1 a_2 \ldots a_n\right)^n .$$

Следовательно, произведение чисел хотя бы в одной из последовательностей не превосходит $2^{(n-1)/2} a_1 a_2 \ldots a_n$, что и требовалось.

11 класс

11.1. Число x таково, что обе суммы $S = \sin 64x + \sin 65x$ и $C = \cos 64x + \cos 65x$ — рациональные числа. Докажите, что в одной из этих сумм оба слагаемых рациональны. (*Н. Агаханов*)

Решение. Заметим. что число

$$S^2 + C^2 = (\sin^2 64x + \cos^2 64x) + (\sin^2 65x + \cos^2 65x) + \\ + 2(\sin 64x \sin 65x + \cos 64x \cos 65x) = \\ = 2 + 2\cos(65x - 64x) = 2 + 2\cos x$$

рационально, откуда $\cos x$ — также рациональное число. Ввиду формулы $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$, все числа вида $\cos 2^k x$ также рациональны — в частности, $\cos 64x$. Поскольку C рационально, то и второе слагаемое в этой сумме также рационально.

Замечание. Слагаемые в сумме S могут оказаться иррациональными, например, при $x = 2\pi/3$.

11.2. Остроугольный равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$) вписан в окружность с центром в точке O. Лучи BO и CO пересекают стороны AC и AB в точках B' и C' соответственно. Через точку C' проведена прямая ℓ, параллельная прямой AC. Докажите, что прямая ℓ касается окружности, описанной около треугольника $B'OC$. (*А. Кузнецов*)

Решение. Пусть прямая AO пересекает ℓ в точке T (см. рис. 3). Из симметрии относительно AO имеем $\angle B'TO = \angle C'TO$. Поскольку $\ell \parallel AC$, получаем $\angle C'TO = \angle OAC = \angle OCA$. Итак, $\angle B'TO = \angle B'CO$, то есть T лежит на окружности ω, описанной около треугольника $B'OC$. Кроме того, из тех же соображений имеем $\angle OB'T = \angle OC'T = \angle OCA = \angle OTC'$, то есть $C'T$ касается ω в точке T.

Замечание. Можно заметить, что O и T — центры окружностей, описанных около треугольника $B'C'T$ и трапеции $BCB'C'$ соответственно.

11.3. На доске выписаны в ряд n положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Вася хочет выписать под каждым числом a_i число $b_i \geqslant a_i$ так, чтобы для любых двух из чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ отношение одного из них к другому было целым. Докажите, что Вася может выписать требуемые числа так, чтобы выполнялось неравенство $b_1 b_2 \ldots b_n \leqslant 2^{(n-1)/2} a_1 a_2 \ldots a_n$.

(*Ф. Петров*)

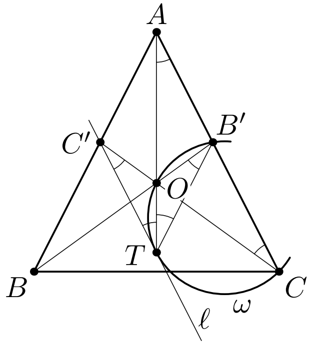

Рис. 3

Решение. Мы докажем, что существуют даже числа $b_1, b_2, \ldots, b_n$, удовлетворяющие следующим (более сильным) условиям:

(1) $b_i \geqslant a_i$ при всех $i \leqslant n$;

(2) $b_1 b_2 \ldots b_n \leqslant 2^{(n-1)/2} a_1 a_2 \ldots a_n$;

(3) отношение любых двух из чисел b_i является степенью двойки (с целым показателем).

Заметим, что доказываемое утверждение не изменится, если какое-то из чисел a_k (а с ним и соответствующее b_k) умножить на некоторую степень двойки. Умножим каждое из чисел a_k на степень двойки так, чтобы все полученные числа лежали в промежутке $[1, 2)$.

Не умаляя общности можно считать, что $1 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n < 2$. Покажем теперь, что одна из следующих n последовательностей удовлетворяет всем трём условиям:

$$\begin{array}{lllllll}
a_1, & 2a_1, & 2a_1, & 2a_1, & \ldots, & 2a_1, & 2a_1; \\
a_2, & a_2, & 2a_2, & 2a_2, & \ldots, & 2a_2, & 2a_2; \\
a_3, & a_3, & a_3, & 2a_3, & \ldots, & 2a_3, & 2a_3; \\
 & & & \cdots & & & \\
a_{n-1}, & a_{n-1}, & a_{n-1}, & a_{n-1}, & \ldots, & a_{n-1}, & 2a_{n-1}; \\
a_n, & a_n, & a_n, & a_n, & \ldots, & a_n, & a_n.
\end{array}$$

Поскольку для любых k и ℓ выполнено неравенство $2a_\ell \geqslant 2 > a_k$, каждая из последовательностей удовлетворяет (1). Кроме того, каждая из последовательностей, очевидно, удовлетворяет (3). Осталось показать, что хотя бы одна из них удовлетворяет (2).

Для этого заметим, что произведение всех n^2 чисел во всех n последовательностях равно

$$2^{(n-1)+(n-2)+\ldots+0} \cdot a_1^n a_2^n \ldots a_n^n = \left(2^{(n-1)/2} a_1 a_2 \ldots a_n\right)^n.$$

Следовательно, произведение чисел хотя бы в одной из последовательностей не превосходит $2^{(n-1)/2} a_1 a_2 \ldots a_n$, что и требовалось.

11.4. У фокусника и помощника есть колода с картами; одна сторона («рубашка») у всех карт одинакова, а другая окрашена в один из 2017 цветов (в колоде по 1000000 карт каждого цвета). Фокусник и помощник собираются показать следующий фокус. Фокусник выходит из зала, а зрители выкладывают на стол в ряд $n > 1$ карт рубашками вниз. Помощник смотрит на эти карты, а затем все, кроме одной, переворачивает рубашкой вверх, не меняя их порядка. Затем входит фокусник, смотрит на стол, указывает на одну из закрытых карт и называет её цвет. При каком наименьшем n фокусник может заранее договориться с помощником так, чтобы фокус гарантированно удался? (*И. Богданов, К. Кноп*)

Ответ. $n = 2018$.

Решение. Положим $k = 2017$.

При $n = k + 1$ фокус устроить легко. Фокусник и помощник нумеруют цвета числами от 1 до k. Помощник, видя цвет последней, $(k+1)$-й карты (пусть его номер равен a), оставляет открытой a-ю карту. Фокусник, увидев, какая по номеру карта открыта, восстанавливает цвет последней карты.

Осталось показать, что при $n \leqslant k$ фокус не удастся. Предположим противное и рассмотрим возможные действия фокусника. Пусть, видя на i-м месте карту цвета a, он объявляет, что на j-м месте карта цвета b (тогда $i \neq j$); будем называть это *инструкцией* $(a, i) \to (b, j)$. Можно считать, что для каждой пары (a, i) существует только одна инструкция вида $(a, i) \to (b, j)$ (и фокусник при возможности всегда применяет её — поскольку никакой информации о том, какую из таких инструкций применять, у него нет). Тогда инструкций не больше, чем kn.

Будем говорить, что исходная раскладка карт *удовлетво-*

ряет инструкции $(a, i) \to (b, j)$, если в ней на i-м и j-м местах лежат карты цветов a и b соответственно. Тогда каждой инструкции удовлетворяет ровно k^{n-2} раскладок. С другой стороны, если фокус гарантированно удаётся, то каждая возможная раскладка удовлетворяет хотя бы одной инструкции — той, которую применят помощник с фокусником. Значит, общее число раскладок не может превосходить $kn \cdot k^{n-2}$, то есть $k^n \leqslant k^{n-1}n$, откуда $k \leqslant n$. Значит. $k = n$, и неравенство выше обращается в равенство. Это значит, что каждая раскладка удовлетворяет *ровно* одной инструкции, и с каждой пары (a, i) начинается *ровно* одна инструкция.

Рассмотрим произвольную инструкцию $(a, i) \to (b, j)$; тогда есть и инструкция вида $(b, j) \to (c, k)$. Поскольку не существует раскладки, удовлетворяющей обеим инструкциям, должны выполняться условия $i = k$ и $a \neq c$.

С другой стороны, для любых двух инструкций $(a, i) \to (b, j)$ и $(c, k) \to (d, \ell)$ среди номеров i, j, k, ℓ должны быть совпадающие — иначе опять же существует раскладка, удовлетворяющая обеим инструкциям. Рассмотрим граф с вершинами $1, 2, \ldots, k$, в котором i и j соединены ребром $[i, j]$, если существует инструкция вида $(a, i) \to (b, j)$ (по доказанному выше, существует также и инструкция вида $(b, j) \to (a', i)$). Тогда любые два ребра в этом графе имеют общую вершину, и из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро. Пусть для определённости $[1, 2]$ — ребро этого графа. Из вершины 3 выходит ребро, имеющее общую вершину с первым — пусть для определённости это $[1, 3]$. Тогда любое ребро из вершины $k > 3$ обязано иметь вид $[1, k]$, чтобы иметь общие вершины с каждым из рёбер $[1, 2]$ и $[1, 3]$. Наконец, любое ребро вообще должно иметь общую вершину с каждым из рёбер $[1, 2]$, $[1, 3]$ и $[1, 4]$, то есть должно содержать вершину 1. Итак, в каждой инструкции один из номеров мест равен 1.

Наконец, сопоставим каждому месту $i > 1$ все такие цвета a, что существует инструкция вида $(c, i) \to (a, 1)$. Из сказанного выше следует, что разным местам не может быть сопоставлен один и тот же цвет. Поскольку таких мест $k - 1$, а цветов $k < 2(k-1)$, какому-то месту i сопоставлен только один цвет a, то есть имеются все k инструкций вида $(c, i) \to (a, 1)$

при всевозможных c. Однако существует также инструкция вида $(a, 1) \to (c, i)$ для некоторого c. Но она не может существовать вместе с инструкцией $(c, i) \to (a, 1)$; противоречие.