Материалы для проведения заключительного этапа

XLIII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2016–2017 учебный год

Второй день

Калининград, 24–30 апреля 2017 г.

Москва, 2017

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа XLIII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, Д. А. Белов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, С. Г. Волчёнков, М. А. Григорьев, М. А. Дидин, О. Ю. Дмитриев, В. Л. Дольников, С. А. Дориченко, Л. А. Емельянов, Г. К. Жуков, М. П. Каленков, Д. В. Карпов, К. А. Кноп, П. А. Кожевников, П. Ю. Козлов, С. О. Кудря, А. С. Кузнецов, Ю. В. Кузьменко, Е. Г. Молчанов, О. С. Нечаева, А. В. Пастор, О. К. Подлипский, И. С. Рубанов, К. А. Сухов, Д. А. Терёшин, С. И. Токарев, А. Д. Труфанов, Б. В. Трушин, М. А. Фадин, И. И. Фролов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков, В. З. Шарич. О. И. Южаков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Компьютерный макет: И. И. Богданов.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.5. На доске написаны $n > 3$ различных натуральных чисел, меньших, чем $(n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1)$. Для каждой пары этих чисел Серёжа поделил большее на меньшее с остатком и записал в тетрадку полученное неполное частное (так, если бы он делил 100 на 7, то он бы получил $100 = 14 \cdot 7 + 2$ и записал бы в тетрадку число 14). Докажите, что среди чисел в тетрадке найдутся два равных. (*С. Берлов*)

Решение. Предположим противное. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — числа на доске в порядке возрастания, а q_i — неполное частное от деления a_{i+1} на a_i ($i = 1, 2, \ldots, n-1$); тогда $a_{i+1} \geqslant q_i a_i$. Так как все q_i различны, имеем $q_1 q_2 \ldots q_{n-1} \geqslant (n-1)!$. Значит,

$$\frac{a_n}{a_1} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_2}{a_1} \geqslant q_{n-1} q_{n-2} \ldots q_1 \geqslant (n-1)!.$$

Это невозможно, если a_1 и a_n — натуральные числа, меньшие $(n-1)!$.

9.6. Верно ли, что для любых трёх различных натуральных чисел a, b и c найдётся квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами и положительным старшим коэффициентом, принимающий в некоторых целых точках значения a^3, b^3 и c^3? (*А. Храбров*)

Ответ. Да, верно.

Решение. Покажем, что трёхчлен

$$f(x) = (a+b+c)x^2 - (ab+bc+ca)x + abc = x^3 - (x-a)(x-b)(x-c)$$

подходит. Ясно, что его коэффициенты целые и старший коэффициент $a+b+c$ положителен. Наконец, легко видеть, что $f(a) = a^3 - 0 = a^3$; аналогично, $f(b) = b^3$ и $f(c) = c^3$.

9.7. Неравнобедренный треугольник ABC, в котором $\angle ACB = 60°$, вписан в окружность Ω. На биссектрисе угла BAC выбрана точка A', а на биссектрисе угла ABC — точка B' так, что $AB' \parallel BC$ и $BA' \parallel AC$. Прямая $A'B'$ пересекает Ω в точках D и E. Докажите, что треугольник CDE равнобедренный. (*А. Кузнецов*)

Решение. Из параллельности прямых AB' и BC получаем, что $\angle AB'B = \angle CBB' = \angle ABB'$. Значит, $AB' = AB$. Аналогично, $AB = A'B$. Обозначим $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle ABC = 2\beta$. Пусть, без ограничения общности, $\alpha > \beta$.

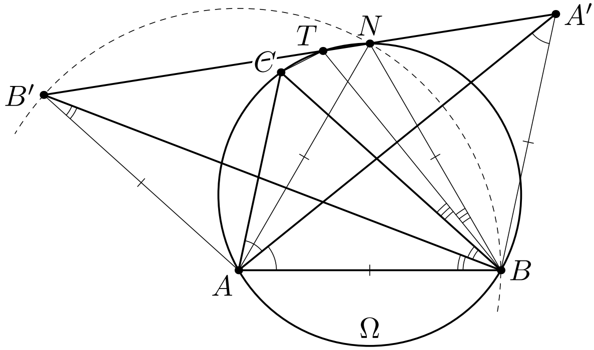

Рис. 1

Обозначим через N середину дуги ACB окружности Ω (см. рис. 1). Тогда $AN = BN$ и $\angle ANB = \angle ACB = 60^\circ$; значит, треугольник ABN равносторонний, и $AN = BN = AB = A'B = B'A$. Поэтому точка A — центр окружности, описанной около треугольника BNB'. Заметим тогда, что $\angle NBB' = \angle NBA - \angle ABB' = 60^\circ - \beta$, откуда $\angle NAB' = 2\angle NBB' = 120^\circ - 2\beta$ и $\angle ANB' = 90^\circ - \angle NAB'/2 = 30^\circ + \beta$. Аналогично, $\angle BNA' = 30^\circ + \alpha$, откуда $\angle B'NA + \angle ANB + \angle BNA' = (30^\circ + \beta) + 60^\circ + (30^\circ + \alpha) = 120^\circ + (\alpha + \beta) = 180^\circ$. Итак, точка N лежит на прямой $A'B'$.

Пусть T — середина меньшей дуги NC окружности Ω. Заметим, что $\angle ANT = \angle ABT = (\angle ABN + \angle ABC)/2 = 30^\circ + \beta = \angle ANB'$. Значит, точка T также лежит на прямой $A'B'$, и треугольник CDE совпадает с треугольником CNT. Этот треугольник равнобедренный, поскольку $NT = TC$.

9.8. Каждая клетка доски 100×100 окрашена либо в чёрный, либо в белый цвет, причём все клетки, примыкающие к границе доски — чёрные. Оказалось, что нигде на доске нет одноцветного клетчатого квадрата 2×2. Докажите, что на доске найдётся клетчатый квадрат 2×2, клетки которого окрашены в шахматном порядке. (*М. Антипов*)

Решение. Предположим противное: на доске нет ни одноцветных, ни шахматно окрашенных квадратов 2×2. Рассмотрим все отрезки сетки, разделяющие две разноцветных клетки (назовём их *разделителями*); пусть их количество равно N.

В любом квадрате 2×2 есть либо ровно одна клетка одного из цветов и три клетки другого, либо две соседних белых клетки и две соседних чёрных. В обоих случаях внутри квадрата есть ровно два разделителя. Всего квадратов 2×2 имеется 99^2, а каждый разделитель лежит внутри ровно двух из них (поскольку к границе разделители не примыкают). Значит, $N = 2 \cdot (99^2)/2 = 99^2$.

С другой стороны, N должно быть чётным. Действительно, в каждой строке и каждом столбце первая и последняя клетка — чёрные; поэтому там должно быть чётное число перемен цвета. Противоречие.

Замечание 1. Вместо подсчёта количества разделителей можно считать количество разноцветных «доминошек» (прямоугольников 1×2) — это то же самое количество, либо же количество одноцветных «доминошек» — оно равно $2 \cdot 100 \cdot 99 - N$.

Замечание 2. Чётность общего количества разделителей можно доказать разными методами. Например, можно заметить, что если все внутренние клетки белые, то число разделителей равно $4 \cdot 98$, а при любой перекраске внутренней клетки оно может измениться только на чётную величину.

Можно также заметить, что все разделители разбиваются на несколько замкнутых ломаных (в рассматриваемом случае через каждый внутренний узел проходит ровно два разделителя, так что эти ломаные даже не имеют общих вершин), а в каждой замкнутой ломаной из отрезков сетки их количество чётно (поскольку чётны количества горизонтальных и вертикальных отрезков).

10 класс

10.5. На доску выписали все собственные делители некоторого составного натурального числа n, увеличенные на 1. Найдите все такие числа n, для которых числа на доске окажутся всеми собственными делителями некоторого натурального числа m. (*Собствен-*

ными делителями натурального числа $a > 1$ называются все его натуральные делители, отличные от a и от 1.) (*А. Храбров*)

Ответ. $n = 4$ или $n = 8$.

Первое решение. Заметим, что число 2 на доску не выписано, ибо 1 — не собственный делитель n; стало быть, m нечётно. Значит, все выписанные делители m нечётны, а потому все делители n чётны. Итак, n не делится на нечётные простые числа, то есть n — степень двойки (и все его делители — тоже).

Если n делится на 16, то 4 и 8 — его собственные делители, поэтому на доску выписаны 5 и 9. Стало быть, m делится на 45 и, в частности, 15 является его собственным делителем. Но число 15 выписано быть не могло, поскольку 14 не является степенью двойки. Следовательно, n не может делиться на 16.

Оставшиеся (составные) степени двойки $n = 4$ и $n = 8$ подходят: для них можно соответственно положить $m = 9$ и $m = 15$.

Второе решение. Пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ — все собственные делители n. Заметим, что все числа $n/a_1 > n/a_2 > \ldots > n/a_k$ — также собственные делители числа n. Значит, они соответственно совпадают с $a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1$, то есть $a_i a_{k+1-i} = n$ при всех $i = 1, 2, \ldots, k$. Аналогичное рассуждение можно провести для делителей числа m.

Пусть $k \geqslant 3$. Тогда $a_1 a_k = a_2 a_{k-1} = n$ и $(a_1 + 1)(a_k + 1) = (a_2 + 1)(a_{k-1} + 1) = m$, откуда $a_1 + a_k = a_2 + a_{k-1} = m - n - 1$. Видим, что у пар чисел (a_1, a_k) и (a_2, a_{k-1}) совпадают и сумма, и произведение; по теореме Виета, они являются парами корней одного и того же квадратного уравнения, то есть эти пары должны совпадать — противоречие.

Итак, $k \leqslant 2$; это возможно, если $n = p^2$, $n = p^3$ или $n = pq$, где p и q — простые числа (в последнем случае будем считать, что $p < q$). Заметим, что p — наименьший собственный делитель n, а из условия $p+1$ — наименьший собственный делитель m, то есть $p + 1$ — простое число. Значит, $p = 2$. Случаи $n = 2^2$ и $n = 2^3$ подходят, как отмечено в первом решении. Случай же $n = 2q$ невозможен. Действительно, в этом случае у m есть лишь два собственных делителя 3 и $q + 1$, то есть $m = 3(q + 1)$, причём $q + 1$ — простое число, отличное от 3, или девятка; оба случая невозможны при простом q.

10.6. Пусть $P(x)$ — многочлен степени $n \geqslant 2$ с неотрицательными коэффициентами, а a, b и c — длины сторон некоторого остроугольного треугольника. Докажите, что числа $\sqrt[n]{P(a)}$, $\sqrt[n]{P(b)}$ и $\sqrt[n]{P(c)}$ также являются длинами сторон некоторого остроугольного треугольника. (*Н. Агаханов, О. Подлипский*)

Решение. Пусть, без ограничения общности, $a \geqslant b \geqslant c$; эти три положительных числа являются длинами сторон остроугольного треугольника тогда и только тогда, когда $a^2 < b^2 + c^2$. Поскольку коэффициенты $P(x)$ неотрицательны, имеем $P(a) \geqslant P(b) \geqslant P(c) > 0$; значит, нам надо проверить, что $\sqrt[n]{P(a)^2} < \sqrt[n]{P(b)^2} + \sqrt[n]{P(c)^2}$.

Пусть $P(x) = p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \ldots + p_0$. Обозначим $G(x) = P(x)/x^n$. Заметим, что

$$G(a) = p_n + \frac{p_{n-1}}{a} + \ldots + \frac{p_0}{a^n} \leqslant p_n + \frac{p_{n-1}}{b} + \ldots + \frac{p_0}{b^n} = G(b)$$

и, аналогично, $G(a) \leqslant G(c)$. Значит,

$$\sqrt[n]{P(a)^2} = a^2\sqrt[n]{G(a)^2} < (b^2 + c^2)\sqrt[n]{G(a)^2} \leqslant$$
$$\leqslant b^2\sqrt[n]{G(b)^2} + c^2\sqrt[n]{G(c)^2} = \sqrt[n]{P(b)^2} + \sqrt[n]{P(c)^2},$$

что и требовалось доказать.

10.7. Каждая клетка доски 100×100 окрашена либо в чёрный, либо в белый цвет, причём все клетки, примыкающие к границе доски — чёрные. Оказалось, что нигде на доске нет одноцветного клетчатого квадрата 2×2. Докажите, что на доске найдётся клетчатый квадрат 2×2, клетки которого окрашены в шахматном порядке. (*М. Антипов*)

Решение. Предположим противное: на доске нет ни одноцветных, ни шахматно окрашенных квадратов 2×2. Рассмотрим все отрезки сетки, разделяющие две разноцветных клетки (назовём их *разделителями*); пусть их количество равно N.

В любом квадрате 2×2 есть либо ровно одна клетка одного из цветов и три клетки другого, либо две соседних белых клетки и две соседних чёрных. В обоих случаях внутри квадрата есть ровно два разделителя. Всего квадратов 2×2 имеется 99^2, а каждый разделитель лежит внутри ровно двух из них (поскольку к границе разделители не примыкают). Значит, $N = 2\cdot(99^2)/2 = 99^2$.

С другой стороны, N должно быть чётным. Действительно, в каждой строке и каждом столбце первая и последняя клетка — чёрные; поэтому там должно быть чётное число перемен цвета. Противоречие.

Замечание 1. Вместо подсчёта количества разделителей можно считать количество разноцветных «доминошек» (прямоугольников 1×2) — это то же самое количество, либо же количество одноцветных «доминошек» — оно равно $2 \cdot 100 \cdot 99 - N$.

Замечание 2. Чётность общего количества разделителей можно доказать разными методами. Например, можно заметить, что если все внутренние клетки белые, то число разделителей равно $4 \cdot 98$, а при любой перекраске внутренней клетки оно может измениться только на чётную величину.

Можно также заметить, что все разделители разбиваются на несколько замкнутых ломаных (в рассматриваемом случае через каждый внутренний узел проходит ровно два разделителя, так что эти ломаные даже не имеют общих вершин), а в каждой замкнутой ломаной из отрезков сетки их количество чётно (поскольку чётны количества горизонтальных и вертикальных отрезков).

10.8. Неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность с центром O и описан около окружности с центром I. Точка B', симметричная точке B относительно прямой OI, лежит внутри угла ABI. Докажите, что касательные к окружности, описанной около треугольника $BB'I$, проведенные в точках B' и I, пересекаются на прямой AC. (*А. Кузнецов*)

Первое решение. Пусть прямая BI вторично пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке S. Пусть лучи SB' и CA пересекаются в точке T (см. рис. 2). По *лемме о трезубце* имеем $SA = SC = SI$. Из равенства $IB = IB'$ получаем $\angle IB'B = \angle IBB' = \phi$. Так как $OB = OB'$, четырёхугольник $AB'SB$ вписан, откуда $\angle SAB' = \angle SBB' = \phi$. Угол SAC — внешний для треугольника SAT, откуда $\angle ATS =$

$= \angle SAC - \angle ASB' = \angle SBC - \angle ABB' = \angle SBA - \angle ABB' =$
$= \angle SBB' = \phi.$

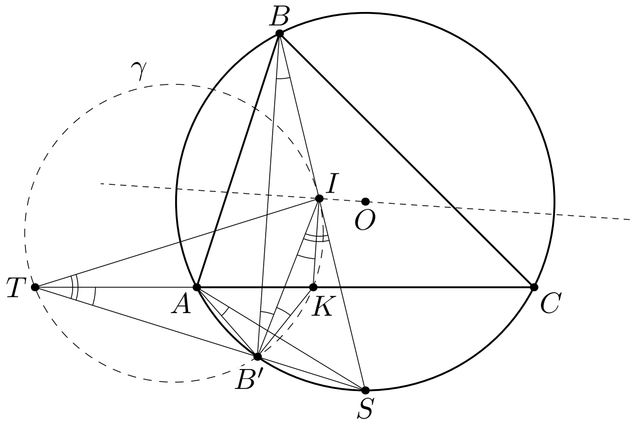

Рис. 2

Таким образом, $\angle B'AS = \phi = \angle ATS$; значит, треугольники SAB' и STA подобны по двум углам, откуда $SB' \cdot ST = SA^2 = SI^2$. Следовательно, прямая SI касается окружности γ, описанной около треугольника TIB'. Тогда $\angle ITB' = \angle B'IS$. Но угол $B'IS$ — внешний для треугольника IBB', поэтому он равен 2ϕ. Значит, $\angle ITA = \angle ITB' - \phi = 2\phi - \phi = \phi$.

Обозначим вторую точку пересечения окружности γ с прямой AC через K. Имеем $\angle KB'I = \angle KTI = \phi = \angle IB'B$. Также $\angle KIB' = \angle KTB' = \phi = \angle IBB'$. Таким образом, прямые KI и KB' касаются окружности, описанной около треугольника $BB'I$, а точка K лежит на прямой AC по построению.

Второе решение. Поскольку $OB = OB'$ из симметрии, точка B' лежит на окружности Ω, описанной около треугольника ABC. Пусть лучи AI и CI вторично пересекают окружность Ω в точках A_1 и C_1 соответственно. Пусть K — точка пересечения касательных к окружности, описанной около треугольника $BB'I$, проведенных в точках B' и I; тогда $KI = KB'$. Поскольку $IB' = IB$, имеем $\angle IB'B = \angle IBB' = \angle KIB'$, откуда $KI \parallel BB'$ и $KI \perp OI$.

Пусть K' — точка, симметричная точке K относительно прямой OI, а K_1 — точка пересечения прямых KI и AC (см. рис. 3).

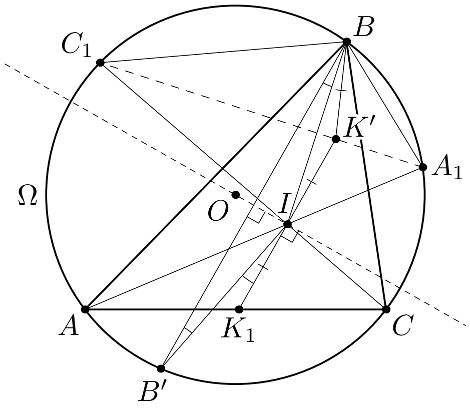

Рис. 3

Поскольку $KB' = KI$, из симметрии получаем $K'B = K'I$; кроме того, $C_1B = C_1I$ и $A_1B = A_1I$ по *лемме о трезубце*. Таким образом, точки K', A_1 и C_1 лежат на одной прямой — серединном перпендикуляре к BI. Поскольку $OI \perp K'K_1$, по *лемме о бабочке* для четырёхугольника AC_1A_1C получаем $K'I = IK_1$. Но из симметрии $K'I = IK$. Следовательно, точки K_1 и K совпадают.

11 класс

11.5. Пусть $P(x)$ — многочлен степени $n \geqslant 2$ с неотрицательными коэффициентами, а a, b и c — длины сторон некоторого треугольника. Докажите. что числа $\sqrt[n]{P(a)}$, $\sqrt[n]{P(b)}$ и $\sqrt[n]{P(c)}$ также являются длинами сторон некоторого треугольника. (*Н. Агаханов*)

Решение. Пусть, без ограничения общности, $a \geqslant b \geqslant c$; эти три положительных числа являются длинами сторон треугольника тогда и только тогда, когда $a < b + c$. Поскольку коэффициенты $P(x)$ неотрицательны, имеем $P(a) \geqslant P(b) \geqslant P(c) > 0$; значит, нам надо проверить, что $\sqrt[n]{P(a)} < \sqrt[n]{P(b)} + \sqrt[n]{P(c)}$.

Пусть $P(x) = p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \ldots + p_0$. Обозначим $G(x) = P(x)/x^n$. Заметим, что

$$G(a) = p_n + \frac{p_{n-1}}{a} + \ldots + \frac{p_0}{a^n} \leqslant p_n + \frac{p_{n-1}}{b} + \ldots + \frac{p_0}{b^n} = G(b)$$

и, аналогично, $G(a) \leqslant G(c)$. Значит,

$$\sqrt[n]{P(a)} = a\sqrt[n]{G(a)} < (b + c)\sqrt[n]{G(a)} \leqslant$$

$$\leqslant b\sqrt[n]{G(b)} + c\sqrt[n]{G(c)} = \sqrt[n]{P(b)} + \sqrt[n]{P(c)},$$

что и требовалось доказать.

11.6. В некоторых клетках квадрата 200×200 стоит по одной фишке — красной или синей; остальные клетки пусты. Одна фишка *видит* другую, если они находятся в одной строке или одном столбце. Известно, что каждая фишка видит ровно пять фишек другого цвета (и, возможно, некоторое количество фишек своего цвета). Найдите наибольшее возможное количество фишек, стоящих в клетках. (*И. Богданов*)

Ответ. 3800 фишек.

Решение. Пример, содержащий 3800 фишек, получается, например, так. Выделим у квадрата 200×200 «каёмку» ширины 5. Эта каёмка состоит из четырёх угловых квадратов 5×5 и четырёх прямоугольников 5×190. Расставим фишки в эти четыре прямоугольника: в левый и в верхний — красные, а в правый и в нижний — синие. Нетрудно видеть, что этот пример удовлетворяет всем требованиям, и в нём по 1900 красных и синих фишек.

Осталось доказать, что фишек не может быть больше 3800. Рассмотрим произвольную расстановку фишек, удовлетворяющую требованиям. Назовём ряд (строку или столбец) *разноцветным*, если в нём есть фишки обеих цветов.

Сделаем сразу два полезных замечания. Во-первых, каждая фишка видит какую-то фишку другого цвета, поэтому каждая фишка лежит хотя бы в одном разноцветном ряду. Кроме того, поскольку разноцветный ряд содержит красную фишку, в нём не может быть более пяти синих фишек (иначе красная все их увидит). Аналогично, в разноцветном ряду не более пяти красных фишек, то есть всего не более 10 фишек.

Теперь нетрудно получить требуемую оценку. Если есть 191 разноцветная строка, то в них не более $191 \cdot 10 = 1910$ фишек, а в оставшихся девяти строках не более $9 \cdot 200 = 1800$ фишек, итого не больше $1910 + 1800 < 3800$ фишек. Аналогично разбирается случай, когда есть 191 разноцветный столбец. Если же и тех и других не более, чем по 190, то они содержат не более $190 \cdot 10 + 190 \cdot 10 = 3800$ фишек, причём все фишки содержатся в этих рядах. Оценка доказана.

Замечание. Можно показать, что при любом $n \geqslant 30$ наибольшее число фишек, которые можно разместить на доске $n \times n$ согласно условиям, равно $20(n-10)$.

Приведём соответствующую оценку. Пусть, без ограничения общности, на доске есть a разноцветных столбцов и $b \geqslant a$ разноцветных строк. Если $b \leqslant n-10$, то, как и в решении, получаем, что общее число фишек не больше $10a + 10b \leqslant 20(n-10)$. Пусть $b > n-10$. Тогда в b строках расположено максимум по 10 фишек; с другой стороны, каждая фишка должна находиться в разноцветном ряду, так что в пересечении $n-a$ одноцветных столбцов и $n-b$ одноцветных строк фишки стоять не могут. Поэтому в $n-b$ одноцветных строках не более, чем по $a(\leqslant b)$ фишек, и общее число фишек не больше, чем $10b + (n-b)b = (n+10-b)b \leqslant 20(n-10)$ (последнее неравенство выполнено, поскольку $(n+10-b)+b = 20+(n-10)$ и $n+10-b \leqslant 20 \leqslant n-10 \leqslant b$).

11.7. Изначально на доске написано натуральное число N. В любой момент Миша может выбрать число $a > 1$ на доске, стереть его и дописать все натуральные делители a, кроме него самого (на доске могут появляться одинаковые числа). Через некоторое время оказалось, что на доске написано N^2 чисел. При каких N это могло случиться? (*М. Фадин, К. Коваленко*)

Ответ. Только при $N = 1$.

Решение. Лемма. *При любом натуральном $n > 1$ верно неравенство*

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1.$$

Доказательство. Ясно, что при $t > 1$

$$\frac{1}{t^2} < \frac{1}{t(t-1)} = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\,.$$

Складывая такие неравенства при $t = 2, 3, \ldots, n$, получаем

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} < 1,$$

что и требовалось. □

Докажем индукцией по N, что при любом натуральном N на доске окажется не более N^2 чисел, причём ровно N^2 чисел может оказаться лишь при $N = 1$. Из этого и будет следовать ответ в задаче.

База при $N = 1$ очевидна. Для перехода предположим, что $N > 1$. Пусть $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k < d_{k+1} = N$ — все делители числа N. После первой замены на доске окажутся числа d_1, d_2, $\ldots$, d_k. Мысленно разделим доску на k частей так, чтобы число d_j находилось в j-ой части. Далее при каждой замене будем выписывать преемников числа в ту же часть, где было само число. По предположению индукции, в j-й части доски не может оказаться больше, чем d_j^2 чисел. Значит, общее количество чисел на доске не может превышать $d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_k^2$.

Заметим теперь, что числа $N/d_1 > N/d_2 > \ldots > N/d_k > > N/d_{k+1}$ также являются делителями числа N. Следовательно, они равны числам d_{k+1}, d_k, $\ldots$, d_2, d_1 соответственно. С учётом леммы получаем, что общее количество чисел на доске не будет превосходить числа

$$d_1^2 + d_2^d + \ldots + d_k^2 = \frac{N^2}{d_{k+1}^2} + \frac{N^2}{d_k^2} + \ldots + \frac{N^2}{d_2^2} =$$
$$= N^2 \left(\frac{1}{d_2^2} + \frac{1}{d_3^2} + \ldots + \frac{1}{d_{k+1}^2} \right) \leqslant$$
$$\leqslant N^2 \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{N^2} \right) < N^2 \cdot 1 = N^2,$$

что и требовалось доказать.

11.8. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Обозначим через I_A, I_B, I_C и I_D центры окружностей ω_A, ω_B, ω_C и ω_D, вписанных в треугольники DAB, ABC, BCD и CDA соответственно. Оказалось, что $\angle BI_AA + \angle I_CI_AI_D = 180^\circ$. Докажите, что $\angle BI_BA + \angle I_CI_BI_D = 180^\circ$. (*А. Кузнецов*)

Решение. *Шаг 1.* Обозначим через P центр гомотетии с положительным коэффициентом, переводящей ω_A в ω_D (точка P может оказаться бесконечно удалённой), а через R — центр гомотетии с отрицательным коэффициентом, переводящей ω_A в ω_C (см. рис. 4). Поскольку AD — общая внешняя касательная к ω_A и ω_D, имеем $P \in AD$; аналогично, $R \in BD$.

Покажем, что данное условие

$$\angle BI_AA = 180^\circ - \angle I_CI_AI_D \qquad (*)$$

равносильно тому, что прямая ℓ_A, проходящая через P и R, — общая касательная к окружностям ω_A, ω_C и ω_D. Пусть для определённости точка P лежит на луче DA (другие случаи аналогичны). Поскольку ω_A вписана в треугольник ABD, имеем $\angle AI_AB = 90^\circ + \angle ADB/2$; с другой стороны, $180^\circ - \angle I_CI_AI_D = \angle PI_AR$. Значит, $(*)$ равносильно равенству $\angle PI_AR = 90^\circ + \angle PDR/2$.

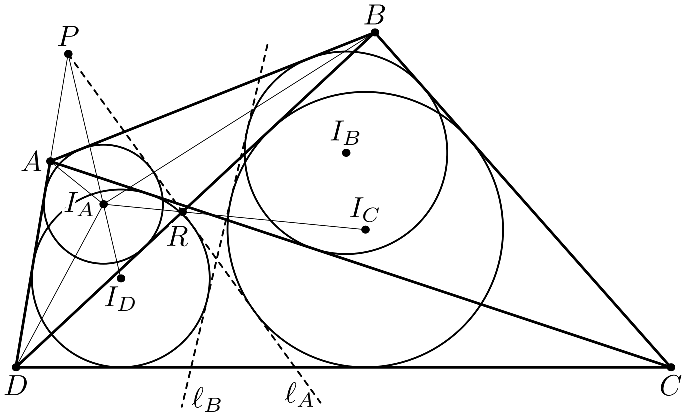

Рис. 4

Обозначим через J центр окружности, вписанной в треугольник PDR. Точки I_A и J лежат на биссектрисе этого треугольника из точки D, а $(*)$ равносильно тому, что $\angle PJR = \angle PI_AR$ — то есть совпадению точек J и I_A. Это, в свою очередь, означает в точности, что прямые PR и RD симметричны относительно I_AI_C, а прямые PD и PR симметричны относительно I_AI_D, то есть что PR касается всех трёх окружностей ω_A, ω_C и ω_D (ω_C лежит по другую сторону от PR, нежели остальные две).

Аналогично, требуемое условие $\angle BI_BA + \angle I_CI_BI_D = 180^\circ$ равносильно тому, что у окружностей ω_A, ω_C и ω_D существует общая касательная ℓ_B, относительно которой ω_C и ω_D лежат по одну сторону, а ω_A — по другую. Осталось оказать, что эти два факта равносильны.

Шаг 2. Обозначим точку касания окружности ω_A с AD через A_{AD}; аналогично обозначим другие точки касания (см.

рис. 5). Заметим, что $A_{AD}D_{AD} = |AA_{AD} - AD_{AD}| = \left|\frac{AB + AD - BD}{2} - \frac{AC + AD - CD}{2}\right| = \frac{|AB + CD - BD - AC|}{2}$; аналогично,

$$B_{BC}C_{BC} = \frac{|AB + CD - BD - AC|}{2} = A_{AD}D_{AD},$$

$$A_{BD}C_{BD} = \frac{|AD + BC - AB - CD|}{2} = B_{AC}D_{AC}.$$

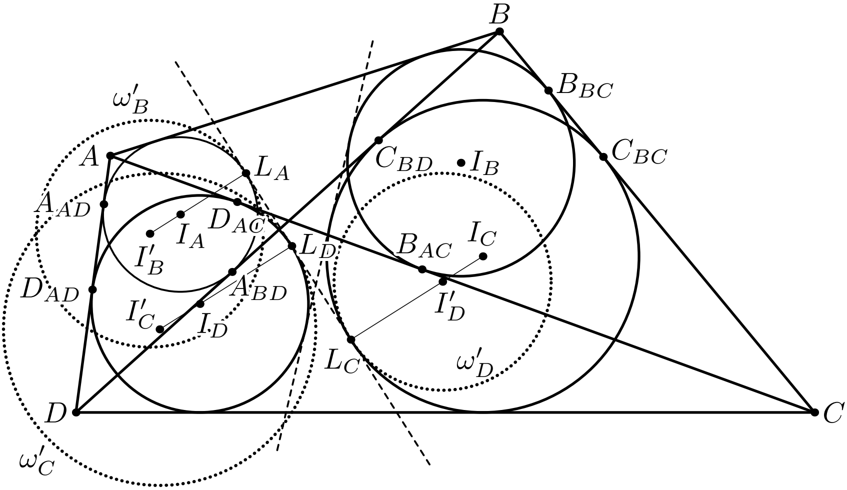

Рис. 5

Предположим теперь, что ℓ_A касается окружностей ω_A, ω_C и ω_D в точках L_A, L_C и L_D соответственно. Тогда $L_AL_D = A_{AD}D_{AD} = B_{BC}C_{BC}$ и $L_AL_C = A_{BD}C_{BD} = D_{AC}B_{AC}$.

Рассмотрим окружности ω'_B, ω'_C и ω'_D с центрами I'_B, I'_C и I'_D, имеющие те же радиусы, что и ω_B, ω_C и ω_D соответственно, и касающиеся ℓ_A в точках L_A, L_D и L_C соответственно (причём ω'_B и ω'_C лежат по одну сторону от ℓ_A, а ω'_D — по другую). Тогда соответственные отрезки общих касательных к ω'_B, ω'_C, ω'_D и к ω_B, ω_C, ω_D имеют одинаковые длины (для ω_C и ω_D это тривиально, для остальных пар следует из сказанного выше).

Отсюда легко следует, что соответственные стороны треугольников $I_BI_CI_D$ и $I'_BI'_CI'_D$ равны (например, $I'_BI'_C = I_BI_C$ из равенства четырёхугольников $I'_BL_AL_DI'_C$ и $I_BB_{BC}C_{BC}I_C$). Поэтому и конфигурации окружностей $(\omega_B, \omega_C, \omega_D)$ и $(\omega'_B, \omega'_C, \omega'_D)$ также равны. Поскольку окружности в одной тройке касаются одной прямой ℓ_A, то же верно и для другой тройки. Это и оставалось доказать.

Замечание. Каждый из шагов 1 и 2 можно осуществить по-другому.

Например, на *Шаге 1* можно рассуждать следующим образом. Пусть ℓ_{AD} и ℓ_{AC} — соответственно вторая внешняя касательная к ω_A, ω_D и вторая внутренняя касательная к ω_A, ω_C. Обе они разделяют точки I_A и B, так что они совпадают тогда и только тогда, когда $\ell_{AD} \parallel \ell_{AC}$. Поскольку $I_A I_D$ — биссектриса угла между AD и ℓ_{AD}, а $I_A I_C$ — биссектриса угла между BD и ℓ_{AC}, прямые ℓ_{AD} и ℓ_{AC} параллельны тогда и только тогда, когда $\angle(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DB}) = 2\angle(I_A I_D, I_A I_C)$; последнее равенство равносильно $(*)$.

Далее, из вычислений в начале *Шага 2* можно заметить, что длина общей внутренней касательной к ω_B, ω_D равна сумме длин общей внутренней касательной к ω_C, ω_D и общей внешней касательной к ω_B, ω_C. После этого можно заменить эти окружности на точку I_D и окружности Ω_B, Ω_C с центрами I_B, I_C и радиусами $r_B + r_D$, $r_C + r_D$ соответственно (здесь r_X — радиус окружности ω_X), про которые известно, что длина касательной из I_D к Ω_B равна сумме длин касательной из I_D к Ω_C и общей касательной к Ω_B и Ω_C. В этом случае доказать, что I_D лежит на общей касательной к Ω_B и Ω_C, можно разными способами.