9 класс

Первый день

9.1. Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots$ — бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел, а $p_1, p_2, p_3, \ldots$ — последовательность простых чисел такая, что при каждом натуральном n число a_n делится на p_n. Оказалось, что при всех натуральных n и k верно равенство $a_n - a_k = p_n - p_k$. Докажите, что все числа $a_1, a_2, \ldots$ простые.

9.2. Окружность ω касается сторон AB и AC треугольника ABC. Окружность Ω касается стороны AC и продолжения стороны AB за точку B, а также касается ω в точке L, лежащей на стороне BC. Прямая AL вторично пересекает ω и Ω в точках K и M соответственно. Оказалось, что $KB \parallel CM$. Докажите, что треугольник LCM равнобедренный.

9.3. Пусть $a_1, \ldots, a_{25}$ — целые неотрицательные числа, а k — наименьшее из них. Докажите, что

$$[\sqrt{a_1}] + [\sqrt{a_2}] + \ldots + [\sqrt{a_{25}}] \geqslant \left[\sqrt{a_1 + \ldots + a_{25} + 200k}\right].$$

(Как обычно, через $[x]$ обозначается целая часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x.)

9.4. На клетчатой доске $n \times n$ отметили несколько клеток таким образом, что левый нижний (L) и правый верхний (R) углы доски не отмечены, и любой путь коня из L в R обязательно содержит отмеченную клетку. При каких $n > 3$ можно заведомо утверждать, что найдутся три клетки, идущие подряд по диагонали, среди которых отмечено хотя бы две?

XLIV Всероссийская математическая олимпиада школьников

9 класс

Первый день

9.1. Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots$ — бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел, а $p_1, p_2, p_3, \ldots$ — последовательность простых чисел такая, что при каждом натуральном n число a_n делится на p_n. Оказалось, что при всех натуральных n и k верно равенство $a_n - a_k = p_n - p_k$. Докажите, что все числа $a_1, a_2, \ldots$ простые.

9.2. Окружность ω касается сторон AB и AC треугольника ABC. Окружность Ω касается стороны AC и продолжения стороны AB за точку B, а также касается ω в точке L, лежащей на стороне BC. Прямая AL вторично пересекает ω и Ω в точках K и M соответственно. Оказалось, что $KB \parallel CM$. Докажите, что треугольник LCM равнобедренный.

9.3. Пусть $a_1, \ldots, a_{25}$ — целые неотрицательные числа, а k — наименьшее из них. Докажите, что

$$[\sqrt{a_1}] + [\sqrt{a_2}] + \ldots + [\sqrt{a_{25}}] \geqslant \left[\sqrt{a_1 + \ldots + a_{25} + 200k}\right].$$

(Как обычно, через $[x]$ обозначается целая часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x.)

9.4. На клетчатой доске $n \times n$ отметили несколько клеток таким образом, что левый нижний (L) и правый верхний (R) углы доски не отмечены, и любой путь коня из L в R обязательно содержит отмеченную клетку. При каких $n > 3$ можно заведомо утверждать, что найдутся три клетки, идущие подряд по диагонали, среди которых отмечено хотя бы две?

10 класс

Первый день

10.1. Найдите количество корней уравнения

$$|x| + |x+1| + \ldots + |x+2018| = x^2 + 2018x - 2019.$$

10.2. Дан остроугольный треугольник ABC, в котором $AB < AC$. Пусть M и N — середины сторон AB и AC соответственно, а D — основание высоты, проведённой из A. На отрезке MN нашлась точка K такая, что $BK = CK$. Луч KD пересекает окружность Ω, описанную около треугольника ABC, в точке Q. Докажите, что точки C, N, K и Q лежат на одной окружности.

10.3. Дано натуральное число k. На клетчатой плоскости изначально отмечено N клеток. Назовём *крестом* клетки A множество всех клеток, находящихся в одной вертикали или горизонтали с A. Если в кресте неотмеченной клетки A отмечено хотя бы k других клеток, то клетку A также можно отметить. Оказалось, что цепочкой таких действий можно отметить любую клетку плоскости. При каком наименьшем N это могло случиться?

10.4. Изначально на доске записано натуральное число. Затем каждую секунду к текущему числу прибавляют произведение всех его ненулевых цифр. Докажите, что найдётся натуральное a такое, что прибавление числа a случится бесконечное количество раз.

XLIV Всероссийская математическая олимпиада школьников

10 класс

Первый день

10.1. Найдите количество корней уравнения

$$|x| + |x+1| + \ldots + |x+2018| = x^2 + 2018x - 2019.$$

10.2. Дан остроугольный треугольник ABC, в котором $AB < AC$. Пусть M и N — середины сторон AB и AC соответственно, а D — основание высоты, проведённой из A. На отрезке MN нашлась точка K такая, что $BK = CK$. Луч KD пересекает окружность Ω, описанную около треугольника ABC, в точке Q. Докажите, что точки C, N, K и Q лежат на одной окружности.

10.3. Дано натуральное число k. На клетчатой плоскости изначально отмечено N клеток. Назовём *крестом* клетки A множество всех клеток, находящихся в одной вертикали или горизонтали с A. Если в кресте неотмеченной клетки A отмечено хотя бы k других клеток, то клетку A также можно отметить. Оказалось, что цепочкой таких действий можно отметить любую клетку плоскости. При каком наименьшем N это могло случиться?

10.4. Изначально на доске записано натуральное число. Затем каждую секунду к текущему числу прибавляют произведение всех его ненулевых цифр. Докажите, что найдётся натуральное a такое, что прибавление числа a случится бесконечное количество раз.

11 класс

Первый день

11.1. Многочлен $P(x)$ таков, что многочлены $P(P(x))$ и $P(P(P(x)))$ строго монотонны на всей вещественной оси. Докажите, что $P(x)$ тоже строго монотонен на всей вещественной оси.

11.2. Даны положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, где $n \geqslant 2$. Докажите, что

$$\frac{1+x_1^2}{1+x_1x_2}+\frac{1+x_2^2}{1+x_2x_3}+\ldots+\frac{1+x_{n-1}^2}{1+x_{n-1}x_n}+\frac{1+x_n^2}{1+x_nx_1} \geqslant n.$$

11.3. Дано натуральное число k. На клетчатой плоскости изначально отмечено N клеток. Назовём *крестом* клетки A множество всех клеток, находящихся в одной вертикали или горизонтали с A. Если в кресте неотмеченной клетки A отмечено хотя бы k других клеток, то клетку A также можно отметить. Оказалось, что цепочкой таких действий можно отметить любую клетку плоскости. При каком наименьшем N это могло случиться?

11.4. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки P и Q соответственно так, что $PQ \parallel BC$. Отрезки BQ и CP пересекаются в точке O. Точка A' симметрична точке A относительно прямой BC. Отрезок $A'O$ пересекает окружность ω, описанную около треугольника APQ, в точке S. Докажите, что окружность, описанная около треугольника BSC, касается окружности ω.

XLIV Всероссийская математическая олимпиада школьников

11 класс

Первый день

11.1. Многочлен $P(x)$ таков, что многочлены $P(P(x))$ и $P(P(P(x)))$ строго монотонны на всей вещественной оси. Докажите, что $P(x)$ тоже строго монотонен на всей вещественной оси.

11.2. Даны положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, где $n \geqslant 2$. Докажите, что

$$\frac{1+x_1^2}{1+x_1x_2}+\frac{1+x_2^2}{1+x_2x_3}+\ldots+\frac{1+x_{n-1}^2}{1+x_{n-1}x_n}+\frac{1+x_n^2}{1+x_nx_1} \geqslant n.$$

11.3. Дано натуральное число k. На клетчатой плоскости изначально отмечено N клеток. Назовём *крестом* клетки A множество всех клеток, находящихся в одной вертикали или горизонтали с A. Если в кресте неотмеченной клетки A отмечено хотя бы k других клеток, то клетку A также можно отметить. Оказалось, что цепочкой таких действий можно отметить любую клетку плоскости. При каком наименьшем N это могло случиться?

11.4. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки P и Q соответственно так, что $PQ \parallel BC$. Отрезки BQ и CP пересекаются в точке O. Точка A' симметрична точке A относительно прямой BC. Отрезок $A'O$ пересекает окружность ω, описанную около треугольника APQ, в точке S. Докажите, что окружность, описанная около треугольника BSC, касается окружности ω.