Материалы для проведения заключительного этапа

XLIV ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2017–2018 учебный год

Екатеринбург, 23–28 апреля 2018 г.

Москва, 2018

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа XLIV Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, Д. А. Белов, С. Л. Берлов, Н. В. Богачёв, И. И. Богданов, С. Г. Волчёнков, А. А. Гаврилюк, А. А. Гайфуллин, Н. А. Гладков, М. А. Григорьев, М. А. Дидин, О. Ю. Дмитриев, В. Л. Дольников, Л. А. Емельянов, Г. К. Жуков, Ф. А. Ивлев, К. А. Кноп, П. А. Кожевников, П. Ю. Козлов, С. О. Кудря, Ю. В. Кузьменко, Е. Г. Молчанов, О. С. Нечаева, О. К. Подлипский, А. А. Полянский, И. С. Рубанов, А. Р. Сафиуллина, К. А. Сухов, А. Д. Труфанов, И. И. Фролов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков, Н. В. Чернега, К. В. Чувилин, О. И. Южаков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Компьютерный макет: И. И. Богданов.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Запрещается публикация или размещение в сети Интернет условий или решений задач олимпиады.

Условия и решения задач

9 класс

9.1. Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots$ — бесконечная возрастающая последовательность натуральных чисел, а $p_1, p_2, p_3, \ldots$ — последовательность простых чисел такая, что при каждом натуральном n число a_n делится на p_n. Оказалось, что при всех натуральных n и k верно равенство $a_n - a_k = p_n - p_k$. Докажите, что все числа $a_1, a_2, \ldots$ простые. (*А. Голованов*)

Первое решение. Обозначим $c = a_1 - p_1 \geqslant 0$. По условию, при любом n имеем $a_n - a_1 = p_n - p_1$, или $a_n - p_n = a_1 - p_1 = c$.

Предположим, что $c > 0$. Найдётся индекс n такой, что $a_n > 2c$. Тогда $a_n > p_n = a_n - c > a_n - \frac{a_n}{2} = \frac{a_n}{2}$, то есть $2p_n > a_n > p_n$. Значит, a_n не делится на p_n; это противоречит условию.

Итак, $c = 0$ и, следовательно, $a_n = p_n$ — простое число при всех n.

Замечание. Доказать, что $c = 0$, можно и по-другому. Например, из равенства $c = a_n - p_n$ следует, что c делится на p_n при любом n. Но это невозможно, так как последовательность чисел $p_n = a_n - c$ строго возрастает.

Второе решение. Обозначим $b_n = a_n/p_n$; по условию, все b_n — натуральные числа.

Заметим, что $p_{n+1} - p_n = a_{n+1} - a_n > 0$. Далее, из того же равенства $p_{n+1} - p_n = a_{n+1} - a_n = b_{n+1}p_{n+1} - b_n p_n$ получаем

$$b_{n+1} = \frac{p_{n+1} - p_n + b_n p_n}{p_{n+1}} = 1 + (b_n - 1)\,\frac{p_n}{p_{n+1}}\,.$$

Отсюда следует, что $b_{n+1} = 1$ тогда и только тогда, когда $b_n = 1$. Кроме того, если $b_n > 1$, то $b_{n+1} < 1 + (b_n - 1) = b_n$.

Итак, если хотя бы один из членов последовательности $b_1, b_2, \ldots$ больше единицы, то эта последовательность строго убывает, пока не появится число b_n, равное 1. Но это невозможно, ибо тогда и $b_{n-1} = 1$. Значит, все члены этой последовательности равны 1, откуда $a_n = p_n$ — простое число.

9.2. Окружность ω касается сторон AB и AC треугольника ABC. Окружность Ω касается стороны AC и продолжения стороны

AB за точку B, а также касается ω в точке L, лежащей на стороне BC. Прямая AL вторично пересекает ω и Ω в точках K и M соответственно. Оказалось, что $KB \parallel CM$. Докажите, что треугольник LCM равнобедренный. (*И. Богданов*)

Первое решение. Из симметрии, прямая AL является биссектрисой угла $\angle BAC$ и проходит через центры окружностей ω и Ω.

Поскольку соответственные стороны треугольников KBL и MCL параллельны, существует гомотетия с центром L, переводящая первый треугольник во второй. Эта гомотетия переводит окружность ω с диаметром KL в окружность с диаметром LM, то есть в Ω. Отрезок AB, касающийся ω, перейдёт в параллельный ему отрезок CA', касающийся Ω; при этом, поскольку $\angle CA'A = \angle A'AB = \angle A'AC$, треугольник $A'CA$ равнобедренный (см. рис. 1).

Пусть O — центр Ω. Поскольку CA и CA' — касательные к Ω, то CO — биссектриса в равнобедренном треугольнике $A'CA$, а стало быть — и высота. Итак, медиана CO треугольника LCM является высотой, откуда и следует требуемое.

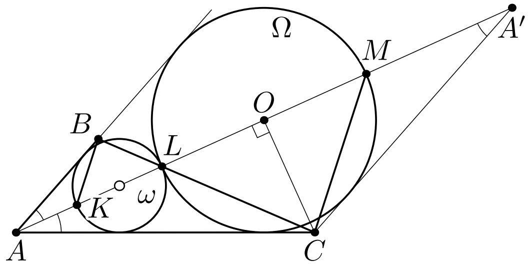

Рис. 1

Второе решение. Из симметрии, точка L лежит на биссектрисе угла BAC, поэтому $\frac{AB}{AC} = \frac{BL}{LC}$. Так как $KB \parallel CM$, по теореме Фалеса имеем $\frac{BL}{LC} = \frac{KL}{LM} = \frac{r}{R}$, где r и R — радиусы ω и Ω соответственно.

Обозначим через O и O' центры Ω и ω соответственно, а через X и X' — точки их касания с AC (см. рис. 2). Тогда прямоугольные треугольники AOX и $AO'X'$ подобны, поэтому $\frac{AO'}{r} = \frac{AO'}{O'X'} = \frac{AO}{OX} = \frac{AO}{R}$, а значит, и $\frac{AL}{r} = \frac{AO'+r}{r} =$

$= \frac{AO+R}{R} = \frac{AM}{R}$. Итак, $\frac{AL}{AM} = \frac{r}{R} = \frac{AB}{AC}$; поэтому треугольники ABL и ACM подобны. Отсюда $\angle CML = \angle ALB = \angle CLM$, а значит, $CL = CM$.

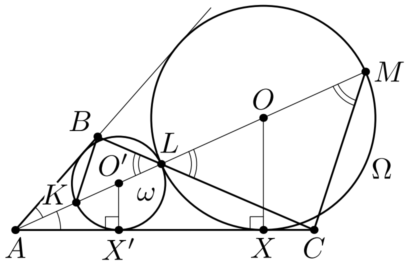

Рис. 2

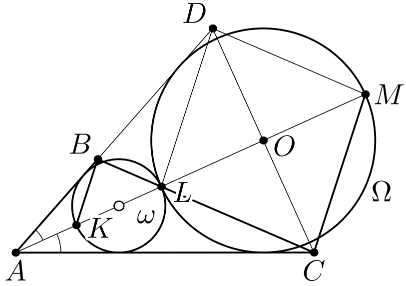

Рис. 3

Третье решение. Опять же заметим, что AL — биссектриса угла $\angle BAC$. Рассмотрим гомотетию с центром A, переводящую ω в Ω. Эта гомотетия переводит K в L, а L — в M. Пусть точка B переходит в точку D (см. рис. 3). Тогда $DM \parallel BL \parallel LC$ и $DL \parallel BK \parallel CM$; значит, $LCMD$ — параллелограмм, и его диагонали LM и CD пересекаются в их общей середине O (т. е. центре Ω).

С другой стороны, поскольку $\angle BAO = \angle CAO$, в треугольнике DAC медиана AO является биссектрисой — а, стало быть, и высотой. Значит, $CD \perp LM$, то есть параллелограмм $LCMD$ — ромб. Поэтому $LC = CM$.

9.3. Пусть $a_1, \ldots, a_{25}$ — целые неотрицательные числа, а k — наименьшее из них. Докажите, что

$$[\sqrt{a_1}\,] + [\sqrt{a_2}\,] + \ldots + [\sqrt{a_{25}}\,] \geqslant \left[\sqrt{a_1 + \ldots + a_{25} + 200k}\,\right].$$

(Как обычно, через $[x]$ обозначается целая часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x.)

(*С. Берлов, А. Храбров*)

Решение. Положим $n_i = [\sqrt{a_i}\,]$. Тогда $a_i < (n_i+1)^2$, а поскольку числа a_i целые, имеем $a_i \leqslant n_i^2 + 2n_i$. Если мы теперь покажем, что

$$\sqrt{a_1 + \ldots + a_{25} + 200k} < n_1 + n_2 + \ldots + n_{25} + 1, \qquad (*)$$

то правая часть доказываемого неравенства не будет превосходить $n_1 + n_2 + \ldots + n_{25}$, что и требовалось.

Пусть для определённости $k = a_1$. Оценим подкоренное выражение в левой части $(*)$:

$$a_1 + \ldots + a_{25} + 200k \leqslant (n_1^2 + 2n_1) + \ldots + (n_{25}^2 + 2n_{25}) + 200k = \\ = (n_1^2 + \ldots + n_{25}^2) + 2(n_1 + \ldots + n_{25}) + 200(n_1^2 + 2n_1).$$

Квадрат правой части $(*)$ равен

$$(n_1^2 + \ldots + n_{25}^2) + 2(n_1n_2 + n_1n_3 + \ldots + n_{24}n_{25}) + 2(n_1 + \ldots + n_{25}) + 1.$$

Сравнивая эти выражения, видим, что достаточно показать, что

$$100(n_1^2 + 2n_1) \leqslant n_1n_2 + n_1n_3 + \ldots + n_{24}n_{25}.$$

Но при любых $i < j$ верно неравенство $n_in_j \geqslant n_1^2 \geqslant n_1$. При этом в правой части стоит $\frac{25 \cdot 24}{2} = 300$ слагаемых такого вида. Оценивая 100 из них числом n_1^2, а остальные 200 — числом n_1, получаем требуемое.

Замечание. В ключевом неравенстве $(*)$ разность между квадратами правой и левой частей может достигать единицы. Как следует из решения, это случается при $a_1 = a_2 = \ldots = a_{24} = 0$, а также при $a_1 = a_2 = \ldots = a_{25} = 3$.

9.4. На клетчатой доске $n \times n$ отметили несколько клеток таким образом, что левый нижний (L) и правый верхний (R) углы доски не отмечены, и любой путь коня из L в R обязательно содержит отмеченную клетку. При каких $n > 3$ можно заведомо утверждать, что найдутся три клетки, идущие подряд по диагонали, среди которых отмечено хотя бы две? (*С. Берлов, А. Сафиуллина*)

Ответ. При $n = 3k + 1$, где k — натуральное число.

Решение. Пронумеруем горизонтали числами $1, 2, \ldots, n$ снизу вверх, а вертикали — слева направо. Будем обозначать клетку через (a, b), где a и b — номера её вертикали и горизонтали соответственно.

Покажем сначала, что при $n = 3k$ и при $n = 3k + 2$ требуемые клетки найдутся не всегда. При $n = 3k$ можно отметить все клетки горизонталей, номера которых дают остаток 2 при делении на 3. Тогда нетрудно видеть, что конь, выйдя из L, сможет ходить лишь по клеткам, содержащим крестик на рис. 4, а значит — не сможет пройти в R. Аналогично, при $n = 3k + 2$ можно отметить все клетки горизонталей, номера которых делятся на 3 (см. рис. 5).

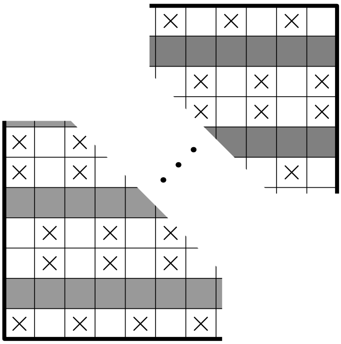

Рис. 4

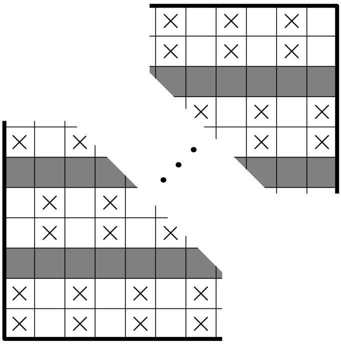

Рис. 5

Осталось показать, что при $n = 3k + 1$ требуемые клетки обязательно найдутся. Докажем это индукцией по k. При $k = 1$ утверждение очевидно: если одна из клеток $(2, 3)$ и $(3, 2)$ не отмечена, то через неё конь сможет дойти до цели.

Для перехода предположим, что $k > 1$, и для меньших значений k утверждение уже доказано. Пусть среди любых трёх клеток, идущих по диагонали, отмечено не больше одной, но конь не может пройти из L в R. Для клетки (a, b) обозначим $(a', b') = (a + 3k - 3, b + 3k - 3)$. Тогда, если клетки (a, b) и (a', b') находятся на доске и не отмечены, то конь может пройти из (a, b) в (a', b') по предположению индукции.

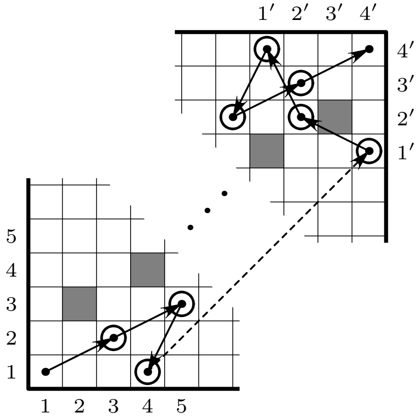

Рис. 6

Одна из клеток $(2, 3)$ и $(3, 2)$ не отмечена — пусть это $(3, 2)$. Если $(3', 2')$ не отмечена, то конь может пройти по маршруту $L \to (3,2) \dashrightarrow (3',2') \to R$, что невозможно. Значит, $(3',2')$ отмечена; по предположению, тогда $(2',3')$ не отмечена, а значит, $(2,3)$ должна быть отмечена по аналогичным причинам. Далее, клетка $(4,4)$ должна быть отмечена, иначе существует путь $L \to (3,2) \to (4,4) \dashrightarrow (4',4') = R$; аналогично, отмечена клетка $(1',1')$ (см. рис. 6).

Из предположения получаем, что клетки с кружками на рис. 6 не отмечены. Тогда, как мы видим, конь может пройти из L в $(4,1)$, оттуда (по предположению индукции) — в $(4',1')$, а оттуда в R. Это противоречие завершает переход индукции.

9.5. На окружности отмечено 99 точек, делящих эту окружность на 99 равных дуг. Петя и Вася играют в игру, делая ходы по очереди. Первым ходит Петя; своим первым ходом он окрашивает в красный или синий цвет любую отмеченную точку. Затем каждый из игроков своим ходом может окрасить в красный или синий цвет любую неокрашенную отмеченную точку, соседнюю с уже окрашенной. Вася выигрывает, если после окрашивания всех точек найдётся равносторонний треугольник, все три вершины которого окрашены, причём в один и тот же цвет. Может ли Петя ему помешать? (*С. Берлов*)

Ответ. Нет.

Решение. Приведём стратегию, позволяющую Васе гарантированно выиграть. Первые ходы он делает произвольно, пока перед его очередным ходом не будут окрашены 33 точки. Пусть A — одна из крайних окрашенных точек, а B — неокрашенная точка, соседняя с другой крайней. Тогда существует отмеченная точка C такая, что ABC — равносторонний треугольник.

На этом ходе Вася красит точку B в тот же цвет, что и A (без ограничения общности, красный). Далее он действует так. Если Петя красит точку, соседнюю с C, то Вася красит C в красный цвет и выигрывает, получив одноцветный треугольник ABC. Если же Петя красит точку, несоседнюю с C, то и Вася тоже красит несоседнюю с C. Если Вася сможет так действовать, то в результате точку C окрасит именно он и выиграет.

Предположим, что он не смог сходить согласно стратегии. Это значит, что Петя окрасил несоседнюю с C точку, а Вася не имеет такой возможности. Это значит, что остались неокрашенными ровно три точки: C и два её соседа. Но тогда окрашено 96 точек, и ход должен делать Петя. Полученное противоречие завершает решение.

9.6. Даны натуральные числа a и b. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что число a^n+1 **не** делится на n^b+1. (*А. Голованов*)

Решение. Назовём натуральное n *плохим*, если a^n+1 не делится на n^b+1. Наша цель — доказать, что плохих чисел бесконечно много.

Первое решение. Докажем, что при любом чётном n одно из чисел n и n^3 плохое; из этого, очевидно, следует требуемое. Предположим противное. Тогда $a^n+1 \,\vdots\, n^b+1$ и $a^{n^3}+1 \,\vdots\, n^{3b}+1 \,\vdots\, n^b+1$. Иначе говоря, $a^n \equiv -1 \pmod{n^b+1}$ и $a^{n^3} \equiv -1 \pmod{n^b+1}$. Но отсюда следует, что $-1 \equiv a^{n^3} = (a^n)^{n^2} \equiv (-1)^{n^2} \equiv 1 \pmod{n^b+1}$; это невозможно, ибо $n^b+1>2$. Противоречие.

Замечание. Аналогичное решение можно получить, показав, что среди чисел вида 2^k при нечётных k не более одного неплохого. Действительно, если числа 2^k и 2^ℓ при нечётных $k<\ell$ неплохи, то $a^{2^k}+1 \,\vdots\, 2^{kb}+1 \,\vdots\, 2^b+1$ и, аналогично, $a^{2^\ell}+1 \,\vdots\, 2^b+1$. Это невозможно, ибо $a^{2^\ell} \equiv (a^{2^k})^{2^{\ell-k}} \equiv 1 \pmod{2^b+1}$.

Второе решение. При $a=1$ утверждение задачи очевидно, поэтому будем считать, что $a>1$.

Лемма. *Пусть $a>1$, m и n — натуральные числа. Предположим, что a^n+1 делится на a^m+1. Тогда n делится на m.*

Доказательство. Пусть r — остаток от деления n на m, $n-r=qm$. Тогда $0 \equiv a^n+1 = a^{qm+r}+1 \equiv (-1)^q a^r+1 = \pm a^r+1 \pmod{a^m+1}$, то есть одно из чисел $a^r \pm 1$ делится на a^m+1. Но это невозможно при $r \neq 0$, ибо $0 < a^r \pm 1 < a^m+1$. □

Докажем, что существует бесконечно много плохих чисел вида a^k. Действительно, если $a^{a^k}+1$ делится на $a^{kb}+1$, то по лемме a^k должно делиться на kb. Это невозможно, если, например, k — простое число, большее a. Осталось заметить, что таких простых чисел бесконечно много.

Третье решение. Мы опять же исследуем лишь случай $a > 1$.

Пусть p — некоторый простой делитель числа $(a(a-1))^b + 1$. Положим $n_i = a(a-1) + ip$; тогда при любом i имеем $n_i^b + 1 \equiv \equiv (a(a-1))^b + 1 \equiv 0 \pmod p$, то есть $n_i^b + 1$ делится на p.

С другой стороны, покажем, что числа $a^{n_i} + 1$ и $a^{n_{i+1}} + 1 = = a^{n_i+p} + 1$ не могут одновременно делиться на p. Действительно, иначе на p делилась бы и их разность $a^{n_i}(a^p - 1)$; но это невозможно, ибо $a^p - 1 \equiv a - 1 \pmod p$ по малой теореме Ферма, а числа a и $a-1$ взаимно просты с p.

Итак, либо $a^{n_i} + 1$ не делится на p (и, значит, на $n_i^b + 1$), либо $a^{n_{i+1}} + 1$ не делится на p (и, значит, на $n_{i+1}^b + 1$). Поэтому среди чисел $n_1, n_2, \ldots$ бесконечно много плохих.

9.7. В карточной игре каждой карте сопоставлено числовое значение от 1 до 100, причём каждая карта бьёт меньшую, за одним исключением: 1 бьёт 100. Игрок знает, что перед ним лежат рубашками вверх 100 карт с различными значениями. Крупье, знающий порядок этих карт, может про любую пару карт сообщить игроку, какая из них какую бьёт. Докажите, что крупье может сделать сто таких сообщений, чтобы после этого игрок смог точно узнать значение каждой карты.

(*И. Богданов, К. Кноп, Ю. Кузьменко*)

Решение. Обозначим через c_i карту значения i. Выберем произвольное число $3 \leqslant k \leqslant 98$. Пусть крупье сообщит, какая карта бьёт другую, в парах (c_k, c_1), (c_{100}, c_k), (c_1, c_{100}), а также во всех парах вида (c_{i+1}, c_i) при $i = 2, 3, \ldots, 98$. Всего он сделает 100 сообщений.

Покажем, что по этим данным игрок может восстановить значения всех карт. Он может рассуждать так. Из того, что карты c_{100}, c_k, c_1 бьют друг друга по циклу, следует, что одна из них имеет значение 1, а следующая по циклу — значение 100. Но, кроме карт этого цикла, карту c_k бьёт карта c_{k+1}, а карта c_k бьёт карту c_{k-1}. Значит, c_k не может иметь значение 1 или 100, то есть значения 1 и 100 имеют карты c_1 и c_{100} соответственно.

Наконец, среди оставшихся карт $c_2, c_3, \ldots, c_{99}$ в любой паре карта с бо́льшим значением бьёт другую. Поскольку нам известно, что каждая c_{i+1} бьёт c_i при $i = 2, 3, \ldots, 98$, отсюда следует, что каждая c_i имеет значение i.

Замечание. Аналогичным образом, если в колоде $n > 4$ значений, крупье может сообщить игроку порядок n карт различных значений за n сообщений. При $n = 4$ результат остаётся верным, хотя метод, приведённый выше, не работает (а какой работает?).

9.8. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы A и C равны. На сторонах AB и BC нашлись соответственно точки M и N такие, что $MN \parallel AD$ и $MN = 2AD$. Пусть K — середина отрезка MN, а H — точка пересечения высот треугольника ABC. Докажите, что прямые KH и CD перпендикулярны. (*Б. Обухов*)

Первое решение. Воспользуемся следующим фактом.

Лемма (теорема Монжа). *Выпуклый четырёхугольник $XYZT$ является вписанным тогда и только тогда, когда перпендикуляры, опущенные из середин его сторон на противоположные стороны четырёхугольника, имеют общую точку.*

Доказательство. Пусть P, Q, R и S — середины сторон XY, YZ, ZT и TX соответственно. Как известно, $PQRS$ — параллелограмм, поэтому отрезки PR и QS имеют общую середину T. Симметрия относительно T переводит перпендикуляры, опущенные из середин сторон на противоположные стороны, в серединные перпендикуляры к сторонам. Значит, первые имеют общую точку тогда и только тогда, когда вторые имеют общую точку, то есть когда $XYZT$ вписан. □

Перейдём к решению задачи. Выберем точки C' и A' так, что точки C и A — середины отрезков NC' и MA' соответственно (см. рис. 7). Поскольку $AD \parallel MN$ и $AD = MN/2$, отрезок AD является средней линией в треугольнике $A'MN$, то есть D — середина NA'.

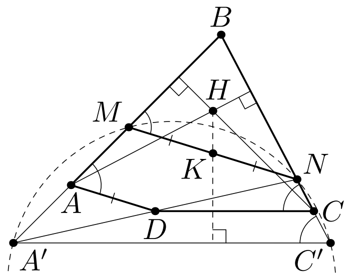

Рис. 7

Поскольку CD и AD — средние линии треугольников $NC'A'$ и $A'MN$, имеем $\angle NC'A' = \angle NCD = \angle MAD = 180^\circ - \angle A'MN$, то есть четырёхугольник $C'A'MN$ вписан. По лемме, из этого следует, что перпендикуляры из A на $C'N$, из C на MA' и из K

на $C'A'$ пересекаются в одной точке. Но первые два перпендикуляра пересекаются в точке H; значит, $KH \perp C'A' \parallel CD$, что и требовалось.

Второе решение. Достаточно показать, что точка H' пересечения высот треугольника CDK совпадает с H.

Поскольку $AMKD$ — параллелограмм, имеем $KD \parallel AB$, а так как $CH' \perp KD$, то $CH' \perp AB$. Остаётся показать, что $AH' \perp CN$.

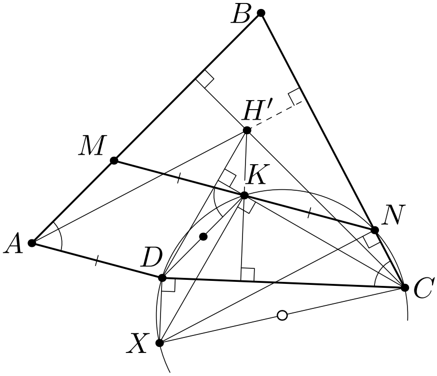

Рис. 8

Заметим, что $\angle DCN = \angle DAM = \angle DKM$, поэтому четырёхугольник $CNKD$ вписан в некоторую окружность. Пусть CX — диаметр этой окружности (см. рис. 8). Тогда $CK \perp KX$, значит, $KX \parallel DH'$. Аналогично, $DX \parallel KH'$, поэтому $KH'DX$ — параллелограмм. Значит, при центральной симметрии относительно середины отрезка DK точка H' переходит в X. Поскольку $AKND$ — тоже параллелограмм, при этой же симметрии точка N переходит в A. Отсюда $AH' \parallel XN$; поскольку $\angle XNC = 90^\circ$ (как опирающийся на диаметр), получаем $AH' \perp CN$.

Третье решение. Покажем, что K — точка пересечения высот треугольника CHD; отсюда будет следовать требуемое.

Как и в предыдущем решении, из параллелограмма $AMKD$ получаем, что $DK \parallel AB \perp CH$. Осталось доказать, что $CK \perp$ $\perp DH$.

Пусть прямая DK пересекает BC в точке V. Достроим треугольник BVD до параллелограмма $BVDU$; тогда точка U лежит на AB, поскольку $DK \parallel AB$. Соответственные стороны треугольников KVN и AUD параллельны, так что эти треугольники подобны; поскольку $AD = KN$, они равны. Значит, $AU = KV$.

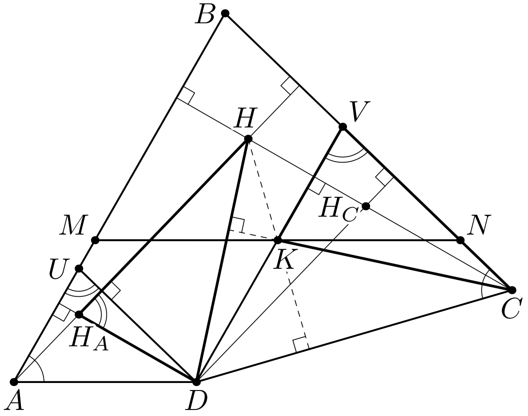

Рис. 9

По условию, $\angle UAD = \angle VCD$. Поскольку $BVDU$ — параллелограмм, имеем $\angle AUD = \angle CVD$. Значит, треугольники AUD и CVD подобны; поэтому $\frac{UD}{VD} = \frac{AU}{CV} = \frac{KV}{CV}$.

Пусть H_A и H_C — точки пересечения высот этих треугольников (см. рис. 9); тогда DH_AHH_C — параллелограмм. Из подобия имеем $\frac{DH_A}{DH_C} = \frac{DU}{DV}$. Итак, $\frac{DH_A}{HH_A} = \frac{DH_A}{DH_C} = \frac{DU}{DV} = \frac{KV}{CV}$ и $\angle DH_AH = \angle KVC$ (соответственные стороны этих углов перпендикулярны). Значит, треугольники DH_AH и KVC подобны; а тогда из упомянутой перпендикулярности следует, что и $DH \perp CK$.

10 класс

10.1. Найдите количество корней уравнения

$$|x| + |x+1| + \ldots + |x+2018| = x^2 + 2018x - 2019.$$

(*В. Дубинская*)

Ответ. 2.

Решение. При $x \in (-2019, 1)$ корней нет, так как на указанном интервале левая часть неотрицательна, а правая — отрицательна.

При $x \in [1, \infty)$ все модули раскрываются со знаком «+», поэтому уравнение примет вид $g(x) = 0$, где $g(x) = x^2 - x - 2009 + (1 + 2 + \ldots + 2018)$. Поскольку $g(1) < 0$, это квадратное уравнение имеет единственный корень на промежутке $[1, \infty)$.

Поскольку графики функций в левой и правой части симметричны относительно прямой $x = -1009$ (т.е. $f(x) = f(-2018 - x)$), то на промежутке $(-\infty, -2019]$ столько же корней, сколько и на промежутке $[1, +\infty)$, т. е. ровно один корень. Итого, у данного уравнения два корня.

10.2. Дан остроугольный треугольник ABC, в котором $AB < AC$. Пусть M и N — середины сторон AB и AC соответственно, а D — основание высоты, проведённой из A. На отрезке MN нашлась точка K такая, что $BK = CK$. Луч KD пересекает окружность Ω, описанную около треугольника ABC, в точке Q. Докажите, что точки C, N, K и Q лежат на одной окружности.

(*К. Иванов*)

Решение. Пусть ℓ — серединный перпендикуляр к BC. Заметим, что ℓ проходит через K. Пусть точка A' симметрична точке A относительно ℓ. Очевидно, A' лежит на Ω, причём из симметрии дуги AB и $A'C$ равны.

Так как точка D симметрична точке A относительно прямой MN, то D и A' симметричны относительно K. Это означает, в частности, что D, K и A' лежат на одной прямой, то есть прямая QD проходит через A'. Тогда $\angle KQC = \angle A'QC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{A'C} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB} = \angle ACB$. Поскольку $MN \parallel BC$, имеем $\angle ACB = \angle ANK$. Отсюда $\angle KQC = \angle ANK$, то есть четырёхугольник $CNKQ$ — вписанный.

Замечание. Разумеется, точки B, M, K и Q также лежат на одной окружности.

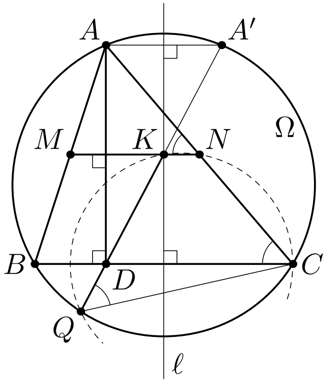

Рис. 10

10.3. Дано натуральное число k. На клетчатой плоскости изначально отмечено N клеток. Назовём *крестом* клетки A множество всех клеток, находящихся в одной вертикали или горизонтали с A. Если в кресте неотмеченной клетки A отмечено хотя бы k других клеток, то клетку A также можно отметить. Оказалось, что цепочкой таких действий можно отметить любую клетку плоскости. При каком наименьшем N это могло случиться? (*Г. Челноков*)

Ответ. $N = \left[\frac{k+1}{2}\right]\cdot\left[\frac{k+2}{2}\right] = \begin{cases} m(m+1), & \text{если } k = 2m; \\ m^2, & \text{если } k = 2m-1 \end{cases}.$

Решение. Обозначим через $N(k)$ ответ в задаче; положим $f(k) = \left[\frac{k+1}{2}\right]\cdot\left[\frac{k+2}{2}\right]$. Докажем сначала, что

$$N(k) \geqslant N(k-1) + \left[\frac{k+1}{2}\right] \quad \text{при } k \geqslant 2. \qquad (*)$$

После отмечания исходных $N(k)$ клеток можно отметить хотя бы одну клетку A; это значит, что либо в столбце, либо в строке этой клетки уже отмечено $\left[\frac{k+1}{2}\right]$ других клеток — пусть для определённости в строке ℓ.

Мысленно отметим все клетки строки ℓ. Ясно, что любую клетку по-прежнему можно отметить. Удалим из клетчатой плоскости строку ℓ и сдвинем вместе две получившиеся полуплоскости так, чтобы снова получилась клетчатая плоскость. Теперь мы можем отметить любую клетку этой новой плоскости, отмечая на каждом шагу клетку, в кресте которой уже есть не менее $k-1$ отмеченных клеток (поскольку из этого креста удалена одна клетка строки ℓ). Следовательно, изначально на этой плоскости должно было быть отмечено не менее $N(k-1)$ клеток. Значит, на исходной плоскости сначала должно быть хотя бы $N(k-1)$ отмеченных клеток не из ℓ; отсюда и следует $(*)$.

Поскольку $N(1)=1$, из доказанного неравенства $(*)$ следует, что

$$N(k) \geqslant \underbrace{1+1+2+2+3+3+4+\ldots}_{k \text{ слагаемых}} = f(k).$$

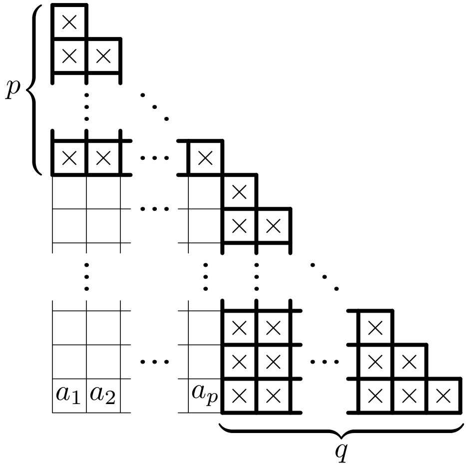

Рис. 11

Осталось показать, как отметить $f(k)$ клеток так, чтобы затем можно было отметить любую другую клетку плоскости. Покажем по индукции, что подходит пример, показанный на рис. 11, состоящий из двух «лесенок» высот $p = \left[\frac{k}{2}\right]$ и $q = \left[\frac{k+1}{2}\right]$; нетрудно понять, что в нём как раз $f(k)$ клеток. При $k=1$ утверждение очевидно: при одной отмеченной клетке можно отметить любую клетку в её кресте, а затем и любую клетку вообще.

Для перехода индукции заметим, что можно последовательно отметить клетки $a_1, a_2, \ldots, a_p$. После этого в строке, в которой они стоят, окажется $p+q=k$ клеток, и в ней уже можно будет отметить любую клетку. Значит, можно, вычеркнув эту строку, уменьшить значение k на 1 и применить предположение индукции в оставшейся плоскости.

10.4. Изначально на доске записано натуральное число. Затем каждую секунду к текущему числу прибавляют произведение всех его ненулевых цифр. Докажите, что найдётся натуральное a такое, что прибавление числа a случится бесконечное количество раз.

(*Д. Крачун*)

Решение. Заметим, что $9^{100} < 10^{99}$, так как $\left(1+\frac{1}{9}\right)^{100} \geqslant$ $\geqslant 1+\frac{100}{9} > 10$ по неравенству Бернулли. Тогда индукцией по m легко получить, что

$$9^m < 10^{m-1} \quad \text{при } m \geqslant 100. \qquad (*)$$

Будем обозначать через $p(d)$ произведение всех ненулевых цифр числа d.

Рассмотрим момент, когда на доске впервые появилось число B, не меньшее $\underbrace{11\ldots1}_{n+1}$ при некотором $n > 200$. Пусть это число получилось из числа A. Так как $p(A) \leqslant 9^n < 10^{n-1}$, то $A > B-10^{n-1} > 10^n$. Пусть A начинается с k единиц, тогда сразу за ними идёт 0, то есть $\underbrace{11\ldots1}_{k}\underbrace{0\ldots0}_{n-k+1} \leqslant A \leqslant \underbrace{11\ldots1}_{k}0\underbrace{9\ldots9}_{n-k}$. Произведение ненулевых цифр такого числа не превосходит 9^{n-k}; с другой стороны, $A+p(A) \geqslant \underbrace{11\ldots1}_{n+1}$, откуда

$$p(A) \geqslant \underbrace{11\ldots1}_{n+1} - \underbrace{11\ldots1}_{k}0\underbrace{9\ldots9}_{n-k} > \underbrace{11\ldots1}_{n-k}.$$

Таким образом, $9^{n-k} \geqslant p(A) > \underbrace{11\ldots1}_{n-k} > 10^{n-k-1}$; согласно $(*)$, из этого следует, что $n-k \leqslant 99$, и тогда $p(A) \leqslant 9^{99}$.

Итак, найдётся бесконечное количество моментов, когда будет прибавляться число, не превосходящее 9^{99}. Значит, какое-то из таких чисел будет прибавляться бесконечное число раз.

Замечание. На самом деле, неравенство $(*)$ верно при $m \geqslant$ $\geqslant 22$.

10.5. В таблицу 10×10 записаны положительные числа так, что в любой строке числа образуют арифметическую прогрессию (в порядке следования слева направо), а в любом столбце — геометрическую прогрессию (в порядке следования сверху вниз). Докажите, что знаменатели всех этих геометрических прогрессий равны. (*П. Кожевников*)

Решение. Достаточно решить задачу для квадрата 3×3. Отсюда будет следовать, что знаменатели прогрессий в любых двух соседних столбцах равны, а значит, они равны и во всех столбцах.

Из того, что в средней строке квадрата записана арифметическая прогрессия, а во всех столбцах — геометрические, следует, что расстановка выглядит как на рис. 12.

$\frac{a-d}{p}$	$\frac{a}{q}$	$\frac{a+d}{r}$
$a-d$	a	$a+d$
$(a-d)p$	aq	$(a+d)r$

Рис. 12

Теперь из условия на остальные строки получаем
$$\frac{a-d}{p}+\frac{a+d}{r}=2\,\frac{a}{q} \quad \text{и} \quad (a-d)p+(a+d)r=2aq.$$

Положим $x=\frac{p}{q}$ и $y=\frac{r}{q}$. Тогда из равенств выше имеем
$$(a-d)y+(a+d)x=2axy \quad \text{и} \quad (a-d)x+(a+d)y=2a.$$
Складывая и сокращая на $2a$, получаем $x+y=xy+1$, или $(x-1)(y-1)=0$. Пусть, например, $x=1$ (случай $y=1$ аналогичен). Тогда $(a-d)+(a+d)y=2a$, $(a+d)y=a+d$, откуда и $y=1$. Итого, $p=q=r$, что и требовалось.

Замечание. Из университетского курса линейной алгебры известно, что если бы знаменатели прогрессий в столбцах были попарно различными, то столбцы образовывали бы *линейно независимую систему* (это — следствие формулы *определителя Вандермонда*); в частности, это означает, что строки не могут одновременно содержать арифметические прогрессии.

10.6. Даны натуральные числа a и b. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что число a^n+1 **не** делится на n^b+1. (*А. Голованов*)

Решение. Назовём натуральное n *плохим*, если a^n+1 не делится на n^b+1. Наша цель — доказать, что плохих чисел бесконечно много.

Первое решение. Докажем, что при любом чётном n одно из чисел n и n^3 плохое; из этого, очевидно, следует требуемое. Предположим противное. Тогда $a^n+1 \,\vdots\, n^b+1$ и $a^{n^3}+1 \,\vdots\, n^{3b}+1 \,\vdots\, n^b+1$. Иначе говоря, $a^n \equiv -1 \pmod{n^b+1}$ и $a^{n^3} \equiv -1$

$\pmod{n^b+1}$. Но отсюда следует, что $-1 \equiv a^{n^3} = (a^n)^{n^2} \equiv \equiv (-1)^{n^2} \equiv 1 \pmod{n^b+1}$; это невозможно, ибо $n^b + 1 > 2$. Противоречие.

Замечание. Аналогичное решение можно получить, показав, что среди чисел вида 2^k при нечётных k не более одного неплохого. Действительно, если числа 2^k и 2^ℓ при нечётных $k < \ell$ неплохи, то $a^{2^k}+1 \,\vdots\, 2^{kb}+1 \,\vdots\, 2^b+1$ и, аналогично, $a^{2^\ell}+1 \,\vdots\, 2^b+1$. Это невозможно, ибо $a^{2^\ell} \equiv (a^{2^k})^{2^{\ell-k}} \equiv 1 \pmod{2^b+1}$.

Второе решение. При $a = 1$ утверждение задачи очевидно, поэтому будем считать, что $a > 1$.

Лемма. *Пусть $a > 1$, m и n — натуральные числа. Предположим, что $a^n + 1$ делится на $a^m + 1$. Тогда n делится на m.*

Доказательство. Пусть r — остаток от деления n на m, $n-r = qm$. Тогда $0 \equiv a^n+1 = a^{qm+r}+1 \equiv (-1)^q a^r+1 = \pm a^r+1 \pmod{a^m+1}$, то есть одно из чисел $a^r \pm 1$ делится на $a^m + 1$. Но это невозможно при $r \neq 0$, ибо $0 < a^r \pm 1 < a^m + 1$. □

Докажем, что существует бесконечно много плохих чисел вида a^k. Действительно, если $a^{a^k} + 1$ делится на $a^{kb} + 1$, то по лемме a^k должно делиться на kb. Это невозможно, если, например, k — простое число, большее a. Осталось заметить, что таких простых чисел бесконечно много.

Третье решение. Мы опять же исследуем лишь случай $a > 1$.

Пусть p — некоторый простой делитель числа $(a(a-1))^b + 1$. Положим $n_i = a(a-1) + ip$; тогда при любом i имеем $n_i^b + 1 \equiv \equiv (a(a-1))^b + 1 \equiv 0 \pmod{p}$, то есть $n_i^b + 1$ делится на p.

С другой стороны, покажем, что числа $a^{n_i} + 1$ и $a^{n_{i+1}} + 1 = = a^{n_i+p} + 1$ не могут одновременно делиться на p. Действительно, иначе на p делилась бы и их разность $a^{n_i}(a^p - 1)$; но это невозможно, ибо $a^p - 1 \equiv a - 1 \pmod{p}$ по малой теореме Ферма, а числа a и $a - 1$ взаимно просты с p.

Итак, либо $a^{n_i} + 1$ не делится на p (и, значит, на $n_i^b + 1$), либо $a^{n_{i+1}} + 1$ не делится на p (и, значит, на $n_{i+1}^b + 1$). Поэтому среди чисел $n_1, n_2, \ldots$ бесконечно много плохих.

10.7. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы A и C равны. На сторонах AB и BC нашлись соответственно точки M и N такие, что $MN \parallel AD$ и $MN = 2AD$. Пусть K — середина отрезка MN, а H — точка пересечения высот треугольника ABC. Докажите, что прямые KH и CD перпендикулярны. (*Б. Обухов*)

Первое решение. Воспользуемся следующим фактом.

Лемма (теорема Монжа). *Выпуклый четырёхугольник $XYZT$ является вписанным тогда и только тогда, когда перпендикуляры, опущенные из середин его сторон на противоположные стороны четырёхугольника, имеют общую точку.*

Доказательство. Пусть P, Q, R и S — середины сторон XY, YZ, ZT и TX соответственно. Как известно, $PQRS$ — параллелограмм, поэтому отрезки PR и QS имеют общую середину T. Симметрия относительно T переводит перпендикуляры, опущенные из середин сторон на противоположные стороны, в серединные перпендикуляры к сторонам. Значит, первые имеют общую точку тогда и только тогда, когда вторые имеют общую точку, то есть когда $XYZT$ вписан. □

Перейдём к решению задачи. Выберем точки C' и A' так, что точки C и A — середины отрезков NC' и MA' соответственно (см. рис. 13). Поскольку $AD \parallel MN$ и $AD = MN/2$, отрезок AD является средней линией в треугольнике $A'MN$, то есть D — середина NA'.

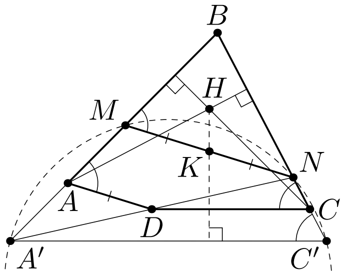

Рис. 13

Поскольку CD и AD — средние линии треугольников $NC'A'$ и $A'MN$, имеем $\angle NC'A' = \angle NCD = \angle MAD = 180^\circ - \angle A'MN$, то есть четырёхугольник $C'A'MN$ вписан. По лемме, из этого следует, что перпендикуляры из A на $C'N$, из C на MA' и из K на $C'A'$ пересекаются в одной точке. Но первые два перпендикуляра пересекаются в точке H; значит, $KH \perp C'A' \parallel CD$, что и требовалось.

Второе решение. Достаточно показать, что точка H' пересечения высот треугольника CDK совпадает с H.

Поскольку $AMKD$ — параллелограмм, имеем $KD \parallel AB$, а так как $CH' \perp KD$, то $CH' \perp AB$. Остаётся показать, что $AH' \perp CN$.

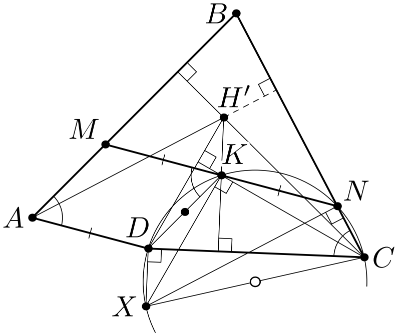

Рис. 14

Заметим, что $\angle DCN = \angle DAM = \angle DKM$, поэтому четырёхугольник $CNKD$ вписан в некоторую окружность. Пусть CX — диаметр этой окружности (см. рис. 14). Тогда $CK \perp KX$, значит, $KX \parallel DH'$. Аналогично, $DX \parallel KH'$, поэтому $KH'DX$ — параллелограмм. Значит, при центральной симметрии относительно середины отрезка DK точка H' переходит в X. Поскольку $AKND$ — тоже параллелограмм, при этой же симметрии точка N переходит в A. Отсюда $AH' \parallel XN$; поскольку $\angle XNC = 90^\circ$ (как опирающийся на диаметр), получаем $AH' \perp CN$.

Третье решение. Покажем, что K — точка пересечения высот треугольника CHD; отсюда будет следовать требуемое.

Как и в предыдущем решении, из параллелограмма $AMKD$ получаем, что $DK \parallel AB \perp CH$. Осталось доказать, что $CK \perp$ $\perp DH$.

Пусть прямая DK пересекает BC в точке V. Достроим треугольник BVD до параллелограмма $BVDU$; тогда точка U лежит на AB, поскольку $DK \parallel AB$. Соответственные стороны треугольников KVN и AUD параллельны, так что эти треугольники подобны; поскольку $AD = KN$, они равны. Значит, $AU = KV$.

По условию, $\angle UAD = \angle VCD$. Поскольку $BVDU$ — парал-

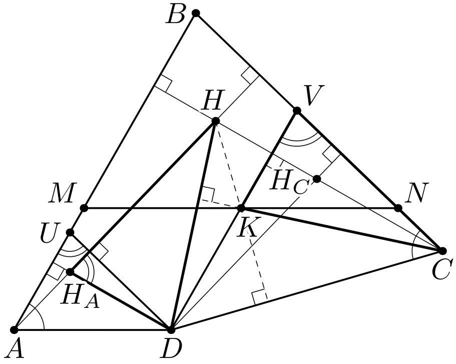

Рис. 15

лелограмм, имеем $\angle AUD = \angle CVD$. Значит, треугольники AUD и CVD подобны; поэтому $\frac{UD}{VD} = \frac{AU}{CV} = \frac{KV}{CV}$.

Пусть H_A и H_C — точки пересечения высот этих треугольников (см. рис. 15); тогда DH_AHH_C — параллелограмм. Из подобия имеем $\frac{DH_A}{DH_C} = \frac{DU}{DV}$. Итак, $\frac{DH_A}{HH_A} = \frac{DH_A}{DH_C} = \frac{DU}{DV} = \frac{KV}{CV}$ и $\angle DH_AH = \angle KVC$ (соответственные стороны этих углов перпендикулярны). Значит, треугольники DH_AH и KVC подобны; а тогда из упомянутой перпендикулярности следует, что и $DH \perp CK$.

10.8. Доска для игры состоит из левой и правой частей. В каждой части есть несколько полей; между ними проведено несколько отрезков, каждый соединяет два поля из разных частей. При этом с любого поля можно по отрезкам добраться до любого другого. Изначально на одном поле левой части стоит лиловая фишка, а на одном поле правой — пурпурная. Лёша и Паша ходят по очереди; начинает Паша. За ход игрок перемещает свою фишку (Лёша — лиловую, а Паша — пурпурную) по отрезку на поле, на котором нет другой фишки. При этом запрещено создавать позицию, которая уже встречалась в игре (позиции совпадают, если в них лиловая фишка стоит на одном и том же поле, и пурпурная — тоже). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Существуют ли доска и начальное расположение фишек, при которых у Паши есть выигрышная стратегия? (*И. Богданов, М. Дидин*)

Ответ. Нет.

Решение. Приведём стратегию, позволяющую Лёше выиграть. Пусть L и P — поля, на которых исходно стоят лиловая (ℓ) и пурпурная (p) фишки соответственно. По условию, от L до P можно дойти по отрезкам; пусть Лёша выберет один такой путь $L = L_1, P_1, L_2, P_2, \ldots, L_n, P_n = P$, в котором поля не повторяются. Позицию в игре будем обозначать парой (A, B), где A и B — поля, на которых стоят ℓ и p соответственно.

Лёша будет действовать следующим образом. Если его фишка ℓ стоит на L_i, он всегда перемещает её на P_i. Если ℓ стоит на P_i, то его ход зависит от положения p: если та стоит на P, то Лёша ходит на L_{i+1}, иначе — на L_i.

Заметим сразу, что количество позиций в игре конечно, так что игра рано или поздно закончится. Значит, если Лёша всегда может сходить согласно стратегии, то рано или поздно не сможет сделать ход Паша. Осталось показать, что Лёша всегда сможет так сходить. После хода Паши фишки находятся в одной и той же части, так что стратегия не может предписывать идти на поле, занятое p.

Пусть до некоторого момента Лёша ходил согласно стратегии, и перед очередным его ходом ℓ стоит на одном из полей L_i или P_i (а p — на некотором поле U). Опишем множество уже встречавшихся позиций, в которых ℓ стояла на L_i или P_i. Впервые ℓ появилась на L_i в позиции (L_i, P) перед пашиным ходом (возможно, это было начало игры). Затем после каждой пары ходов Паши и Лёши были использованы (в некотором порядке) позиции (L_i, X) и (P_i, X) при некотором поле $X \neq P$.

Итак, если перед ходом Лёши ℓ стоит на L_i, а p — на поле U, то позиция (P_i, U) не встречалась раньше. Если ℓ стоит на P_i, а p — на поле $U \neq P$, то позиция (L_i, U) также не встречалась раньше. Значит, в обоих случаях Лёша может сделать ход согласно стратегии. Наконец, если ℓ стоит на P_i, а p — на поле $U = P$, то $i < n$ (иначе скакуны бы стояли на одном поле), так что поле L_{i+1} существует, и ℓ на нём ещё не была. Поэтому Лёша может сходить туда. Доказательство окончено.

11 класс

11.1. Многочлен $P(x)$ таков, что многочлены $P(P(x))$ и $P(P(P(x)))$ строго монотонны на всей вещественной оси. Докажите, что $P(x)$ тоже строго монотонен на всей вещественной оси. (*К. Сухов*)

Первое решение. Так как многочлен $P(P(x))$ монотонен, то он обязан иметь нечётную степень, а тогда он принимает все вещественные значения.

Пусть $a > b$, тогда найдутся такие числа x_a и x_b, что $P(P(x_a)) = a$, $P(P(x_b)) = b$. Так как старший коэффициент многочлена $P(P(x))$ всегда положителен, то этот многочлен возрастает, поэтому $x_a > x_b$.

Если старший коэффициент многочлена $P(x)$ положителен, то многочлен $P(P(P(x)))$ возрастает; отсюда получаем, что $P(P(P(x_a))) > P(P(P(x_b)))$, то есть $P(a) > P(b)$ для любых $a > b$. Если же старший коэффициент отрицателен, то, аналогично, $P(P(P(x_a))) < P(P(P(x_b)))$, откуда $P(a) < P(b)$ для любых $a > b$.

Второе решение. Предположим, что многочлен $P(x)$ не является монотонным. Тогда найдутся такие $a \neq b$, что $P(a) = P(b)$, а значит, и $P(P(a)) = P(P(b))$, то есть $P(P(x))$ не монотонен.

11.2. Даны положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, где $n \geqslant 2$. Докажите, что

$$\frac{1+x_1^2}{1+x_1x_2} + \frac{1+x_2^2}{1+x_2x_3} + \ldots + \frac{1+x_{n-1}^2}{1+x_{n-1}x_n} + \frac{1+x_n^2}{1+x_nx_1} \geqslant n.$$

(*Ф. Петров*)

Решение. Во всех решениях мы считаем, что нумерация переменных циклическая, то есть $x_{n+1} = x_1$, $x_{n+2} = x_2$ и т. д.

Первое решение. Заметим, что при всех $i = 1, 2, \ldots, n$ верно неравенство $(1+x_i^2)(1+x_{i+1}^2) \geqslant (1+x_ix_{i+1})^2$, так как

$$(1+x_i^2)(1+x_{i+1}^2) - (1+x_ix_{i+1})^2 = (x_i - x_{i+1})^2 \geqslant 0.$$

Перемножая все такие неравенства, получим

$$(1+x_1^2)^2(1+x_2^2)^2 \ldots (1+x_n^2)^2 \geqslant (1+x_1x_2)^2(1+x_2x_3)^2 \ldots (1+x_nx_1)^2,$$

или

$$\frac{1+x_1^2}{1+x_1x_2}\cdot\frac{1+x_2^2}{1+x_2x_3}\cdot\ldots\cdot\frac{1+x_n^2}{1+x_nx_1}\geqslant 1.$$

Для доказательства исходного неравенства теперь достаточно применить неравенство о средних арифметическом и геометрическом:

$$\frac{1+x_1^2}{1+x_1x_2}+\frac{1+x_2^2}{1+x_2x_3}+\ldots+\frac{1+x_n^2}{1+x_nx_1}\geqslant$$
$$\geqslant n\sqrt[n]{\frac{1+x_1^2}{1+x_1x_2}\cdot\frac{1+x_2^2}{1+x_2x_3}\cdot\ldots\cdot\frac{1+x_n^2}{1+x_nx_1}}\geqslant n.$$

Второе решение. Индукция по $n\geqslant 2$. В базовом случае $n=2$ неравенство

$$\frac{1+x_1^2}{1+x_1x_2}+\frac{1+x_2^2}{1+x_1x_2}\geqslant 2$$

после домножения на знаменатель и преобразования равносильно неравенству $x_1^2+x_2^2\geqslant 2x_1x_2$.

Для перехода от n к $n+1$ выясним, при каком условии на числа x_i, x_{i+1} и x_{i+2} верно неравенство

$$\frac{1+x_i^2}{1+x_ix_{i+1}}+\frac{1+x_{i+1}^2}{1+x_{i+1}x_{i+2}}\geqslant 1+\frac{1+x_i^2}{1+x_ix_{i+2}}; \qquad (*)$$

заметим, что это неравенство даёт возможность выбросить x_{i+1} из имеющегося ряда чисел и сделать переход индукции.

Переобозначим для удобства $x_i=a$, $x_{i+1}=b$, $x_{i+2}=c$ и перенесем все члены в одну часть:

$$\frac{1+a^2}{1+ab}+\frac{1+b^2}{1+bc}-1-\frac{1+a^2}{1+ac}=(1+a^2)\,\frac{a(c-b)}{(1+ab)(1+ac)}+\frac{b(b-c)}{1+bc}=$$
$$=(c-b)\,\frac{a(1+a^2)(1+bc)-b(1+ab)(1+ac)}{(1+ab)(1+ac)(1+bc)}=$$
$$=\frac{(c-b)(a-b)(1+a(a+b)+a^2bc)}{(1+ab)(1+ac)(1+bc)}.$$

Отсюда видно, что при $b\geqslant a$ и $b\geqslant c$ неравенство $(*)$ выполнено. В частности, оно выполнено, если выбрать индекс i так, чтобы x_{i+1} было наибольшим среди $x_1,\ldots,x_n$; это завершает переход индукции.

Третье решение. Оценим каждое слагаемое по отдельности.

Зафиксируем положительное a и рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{1+a^2}{1+ax} - 1 + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\ln(1+a^2), \qquad x > 0.$$

Её производная равна

$$f'(x) = -\frac{a(1+a^2)}{(1+ax)^2} + \frac{x}{1+x^2} = \frac{x(1+ax)^2 - a(1+a^2)(1+x^2)}{(1+x^2)(1+ax)^2}\,.$$

Преобразуем числитель полученной дроби:

$x+2ax^2+a^2x^3-a-a^3-ax^2-a^3x^2 = (x-a)(1+a(a+x)+a^2x^2).$

Таким образом, $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку $x = a$; значит, $f(x) \geqslant f(a) = 0$ при всех $x > 0$.

Из доказанного следует, что

$$\frac{1+x_i^2}{1+x_ix_{i+1}} \geqslant 1 + \frac{\ln(1+x_i^2) - \ln(1+x_{i+1}^2)}{2}\,.$$

Сложив все n таких неравенств, получим требуемое.

11.3. Дано натуральное число k. На клетчатой плоскости изначально отмечено N клеток. Назовём *крестом* клетки A множество всех клеток, находящихся в одной вертикали или горизонтали с A. Если в кресте неотмеченной клетки A отмечено хотя бы k других клеток, то клетку A также можно отметить. Оказалось, что цепочкой таких действий можно отметить любую клетку плоскости. При каком наименьшем N это могло случиться? (*Г. Челноков*)

Ответ. $N = \left[\frac{k+1}{2}\right]\cdot\left[\frac{k+2}{2}\right] = \begin{cases} m(m+1), & \text{если } k = 2m; \\ m^2, & \text{если } k = 2m-1 \end{cases}.$

Решение. Обозначим через $N(k)$ ответ в задаче; положим $f(k) = \left[\frac{k+1}{2}\right]\cdot\left[\frac{k+2}{2}\right]$. Докажем сначала, что

$$N(k) \geqslant N(k-1) + \left[\frac{k+1}{2}\right] \quad \text{при } k \geqslant 2. \qquad (*)$$

После отмечания исходных $N(k)$ клеток можно отметить хотя бы одну клетку A; это значит, что либо в столбце, либо в строке этой клетки уже отмечено $\left[\frac{k+1}{2}\right]$ других клеток — пусть для определённости в строке ℓ.

Мысленно отметим все клетки строки ℓ. Ясно, что любую клетку по-прежнему можно отметить. Удалим из клетчатой плоскости строку ℓ и сдвинем вместе две получившиеся полуплоскости так, чтобы снова получилась клетчатая плоскость. Теперь мы можем отметить любую клетку этой новой плоскости, отмечая на каждом шагу клетку, в кресте которой уже есть не менее $k-1$ отмеченных клеток (поскольку из этого креста удалена одна клетка строки ℓ). Следовательно, изначально на этой плоскости должно было быть отмечено не менее $N(k-1)$ клеток. Значит, на исходной плоскости сначала должно быть хотя бы $N(k-1)$ отмеченных клеток не из ℓ; отсюда и следует $(*)$.

Поскольку $N(1) = 1$, из доказанного неравенства $(*)$ следует, что

$$N(k) \geqslant \underbrace{1+1+2+2+3+3+4+\ldots}_{k \text{ слагаемых}} = f(k).$$

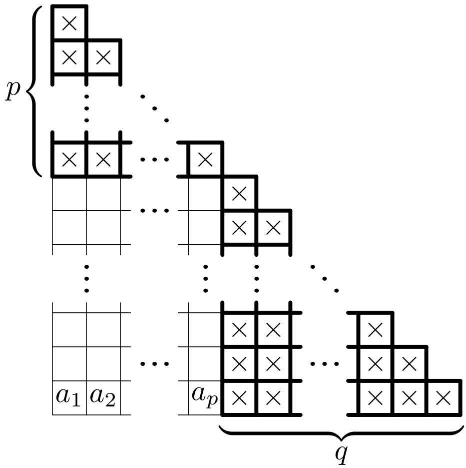

Рис. 16

Осталось показать, как отметить $f(k)$ клеток так, чтобы затем можно было отметить любую другую клетку плоскости. Покажем по индукции, что подходит пример, показанный на рис. 16, состоящий из двух «лесенок» высот $p = \left[\frac{k}{2}\right]$ и $q = \left[\frac{k+1}{2}\right]$; нетрудно понять, что в нём как раз $f(k)$ клеток. При $k = 1$ утверждение очевидно: при одной отмеченной клетке можно отметить любую клетку в её кресте, а затем и любую клетку вообще.

Для перехода индукции заметим, что можно последовательно отметить клетки $a_1, a_2, \ldots, a_p$. После этого в строке, в которой они стоят, окажется $p + q = k$ клеток, и в ней уже можно будет отметить любую клетку. Значит, можно, вычеркнув эту строку, уменьшить значение k на 1 и применить предположение индукции в оставшейся плоскости.

11.4. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки P и Q соответственно так, что $PQ \parallel BC$. Отрезки BQ и CP пересекаются в точке O. Точка A' симметрична точке A относительно прямой BC. Отрезок $A'O$ пересекает окружность ω, описанную около треугольника APQ, в точке S. Докажите, что окружность, описанная около треугольника BSC, касается окружности ω.

(*А. Кузнецов*)

Первое решение. Случай $AB = AC$ следует из симметрии; без ограничения общности будем считать, что $AC > AB$.

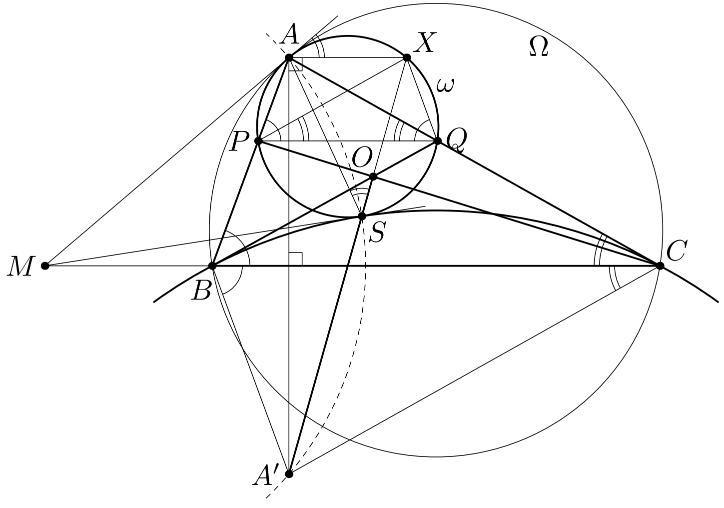

Рис. 17

Выберем на ω точку X так, что $PAXQ$ — равнобокая трапеция. Тогда $\angle XQP = \angle APQ = \angle ABC = \angle CBA'$ и, аналогично, $\angle XPQ = \angle BCA'$. Значит, $XQ \parallel BA'$ и $XP \parallel CA'$. Поэтому гомотетия с центром O, переводящая отрезок PQ в CB, переводит треугольник XPQ в $A'CB$; следовательно, точка O (а потому и точка S) лежит на $A'X$.

Пусть M — центр окружности, описанной около треугольника ASA'. Тогда $\angle MAA' = 90° - \angle ASX$. Поскольку $XA \parallel BC \perp$

$\perp AA'$, получаем $\angle MAX = \angle MAA' + 90^\circ = 180^\circ - \angle ASX$, то есть MA касается ω в точке A. Так как $MA = MS$, то MS также касается ω.

Пусть Ω — окружность, описанная около треугольника ABC; тогда ω и Ω гомотетичны с центром в A, поскольку $PQ \parallel BC$. Значит, MA также является касательной к Ω. Кроме того, M лежит на серединном перпендикуляре BC к отрезку AA'; поэтому $MA^2 = MB \cdot MC$. Итак, $MS^2 = MA^2 = MB \cdot MC$, то есть MS касается описанной окружности треугольника BSC и ω в точке S. Отсюда и следует требуемое.

Второе решение. Как и в первом решении, введём точку X и покажем, что S лежит на $A'X$.

Поскольку треугольник $A'XA$ прямоугольный, центр T его описанной окружности является серединой гипотенузы XA'. Точка T лежит на BC (как на серединном перпендикуляре к AA'). Кроме того, она лежит на серединном перпендикуляре к AX — а значит, и к PQ. Итак, $TP = TQ$. Обозначим $\angle TPQ = \angle TQP = \alpha$.

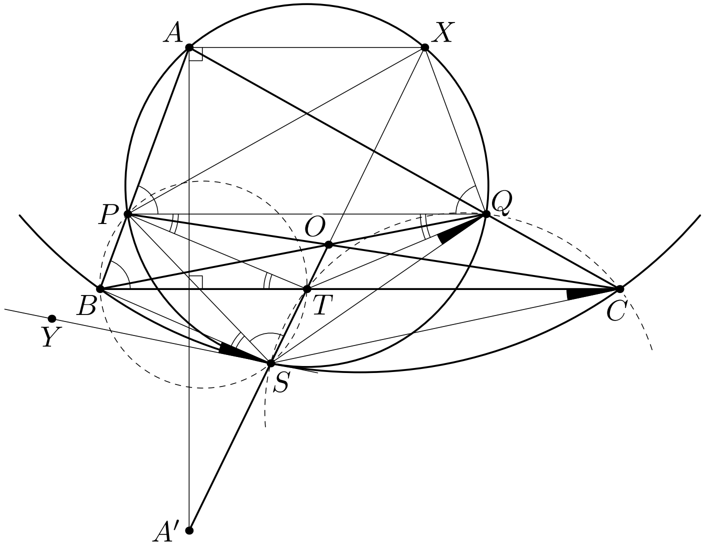

Рис. 18

Заметим, что $\angle XSP = \angle XQP = \angle APQ = \angle PBT$, поэтому точки P, S, T и B лежат на одной окружности. Аналогично, точки Q, S, T и C лежат на одной окружности. Тогда $\angle PSB = \angle PTB = \angle TPQ = \alpha$ и $\angle SCB = \angle SQT = |\alpha - \angle PQS|$. Пусть Y — точка на касательной в точке S к окружности ω, лежащая по ту же сторону от $A'X$, что и A. Тогда $\angle PSY = \angle PQS$ и, следовательно, $\angle BSY = |\alpha - \angle PSY| = |\alpha - \angle PQS| = \angle SCB$. Таким образом, окружность, описанная около треугольника BCS, касается прямой SY в точке S. Тогда она касается и окружности ω, что и требовалось.

11.5. На столе по кругу разложены 1000 карточек, на каждой написано по натуральному числу; все эти числа различны. Сначала Вася выбирает одну из карточек и снимает её со стола. Далее он повторяет следующую операцию. Если на последней снятой карточке было написано число k, то Вася отсчитывает от неё по часовой стрелке k-ую не снятую со стола карточку и тоже снимает её. Это происходит до тех пор, пока на столе не останется одна карточка. Могло ли оказаться, что в начальном расположении есть такая карточка A, что если снять первой любую другую карточку, то в конце останется обязательно карточка A?

(*О. Подлипский*)

Ответ. Могло.

Решение. Временно откажемся от условия различности чисел на карточках. Пусть A и B — две соседние карточки (A лежит после B по часовой стрелке). Напишем на карточке A произвольное число, на карточке B — число 2, а на всех остальных карточках — единицы. Если Вася снимет первой какую-либо карточку, отличную от A, то дальше он будет снимать карточки подряд по часовой стрелке, «перескочив» через A (так как на B написана двойка). Значит, A останется последней.

Осталось сделать числа на карточках попарно различными. Для этого достаточно ко всем числам на карточках прибавить различные натуральные числа, делящиеся на 1000!. Действительно, если при выкидывании карточки x на столе остаётся d карточек, то результат процесса не изменится, если к x прибавить число, кратное d (Вася просто отсчитает несколько дополнительных полных кругов). Значит, если к числу на карточке прибавить число, делящееся на 1000!, то результат процесса не изменится при любом выборе изначально выбранной карточки.

11.6. Три диагонали правильной n-угольной призмы пересекаются в одной внутренней точке O. Докажите, что точка O — центр призмы. (*Диагональ* призмы — это отрезок, соединяющий две её вершины, не находящиеся в одной грани.) (*М. Дидин*)

Первое решение. Пусть диагонали AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O, причём вершины A, B и C лежат на одном основании призмы, а вершины A_1, B_1 и C_1 — на противоположной (см. рис. 19). Тогда точки A, A_1, B и B_1 лежат в одной плоскости α, пересекающей параллельные основания призмы по параллельным отрезкам AB и A_1B_1. Аналогично, $AC \parallel A_1C_1$ и $BC \parallel B_1C_1$. Тогда треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны по двум углам. Поскольку их описанные окружности равны, эти треугольники также равны.

Впишем призму в сферу S. Плоскость α пересекает сферу S по окружности, на которой лежат точки A, B, A_1 и B_1. Поскольку AB и A_1B_1 параллельны и равны, ABA_1B_1 — прямоугольник, а O — его центр, откуда $OA = OB = OA_1 = OB_1$. Аналогично, $OA = OC = OA_1 = OC_1$. Значит, O — центр сферы S, а следовательно, и центр призмы.

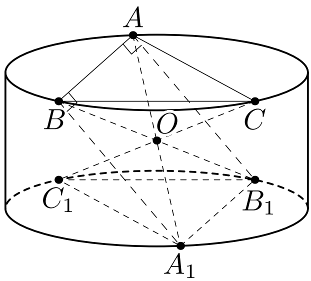

Рис. 19

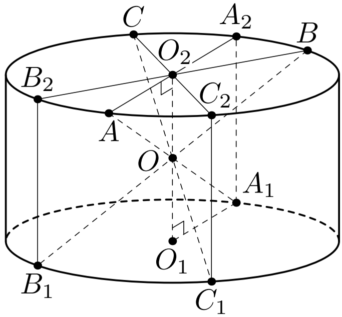

Рис. 20

Второе решение. Введём те же обозначения, что и в начале предыдущего решения. Обозначим проекции точек A_1, B_1, C_1 и O на плоскость ABC через A_2, B_2, C_2 и O_2 соответственно; пусть также O_1 — проекция точки O на плоскость $A_1B_1C_1$ (см. рис. 20). Прямоугольные треугольники AOO_2 и A_1OO_1 подобны по острому углу. Тогда, поскольку $O_2A_2 = O_1A_1$, имеем $\dfrac{AO_2}{O_2A_2} = \dfrac{AO_2}{O_1A_1} = \dfrac{OO_2}{OO_1}$. Аналогично, $\dfrac{AO_2}{O_2A_2} = \dfrac{BO_2}{O_2B_2} = \dfrac{CO_2}{O_2C_2} =$

$= \dfrac{OO_2}{OO_1}$. Поскольку точки A, B, C, A_2, B_2 и C_2 лежат на окружности ω, описанной около соответствующего основания, имеем $AO_2 \cdot O_2A_2 = BO_2 \cdot O_2B_2 = CO_2 \cdot O_2C_2$. Перемножив это равенство с предыдущим, получаем $AO_2 = BO_2 = CO_2$. Тогда O_2 — центр окружности ω, откуда $\dfrac{OO_2}{OO_1} = \dfrac{AO_2}{O_2A_2} = 1$. Итак, точка O — середина отрезка между центрами противоположных граней, то есть центр призмы.

Третье решение. Мы опять используем те же обозначения. Сделаем гомотетию с центром O, переводящую плоскость ABC в плоскость $A_1B_1C_1$. Тогда описанная окружность треугольника ABC перейдёт в описанную окружность треугольника $A_1B_1C_1$. Поскольку эти окружности равны, коэффициент гомотетии равен -1, а описанный около призмы цилиндр переходит в себя. Тогда O — центр этого цилиндра и, значит, совпадает с центром призмы.

11.7. Определим последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ формулой $a_n = \left[n^{\frac{2018}{2017}}\right]$. Докажите, что существует такое натуральное число N, что среди любых N подряд идущих членов последовательности есть такой, десятичная запись которого содержит цифру 5. (Как обычно, через $[x]$ обозначается наибольшее целое число, не превосходящее x.) *(С. Кудря, И. Рубанов)*

Решение. Обозначим $\beta = \dfrac{1}{2017}$. Напомним, что частный случай неравенства Бернулли $(1+x)^{2017} \geqslant 1 + 2017x$ (при $x \geqslant -\beta$) можно переписать в виде $1+\beta y \geqslant (1+y)^{\beta}$ (при $y = 2017x \geqslant -1$).

Лемма 1. *Для любого натурального n верны неравенства* $\dfrac{n+1+\beta}{n+1} \leqslant \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\beta} \leqslant \dfrac{n+\beta}{n}$.

Доказательство. Правое неравенство сразу следует из упомянутого неравенства Бернулли. Для доказательства левого, применяя то же неравенство, получаем

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\beta} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{\beta} \leqslant 1 - \frac{\beta}{n+1} = \frac{n+1-\beta}{n+1},$$

откуда $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\beta} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{-\beta} \geqslant \dfrac{n+1}{n+1-\beta} \geqslant \dfrac{n+1+\beta}{n+1}$. $\square$

Лемма 2. *Для любого натурального n верны неравенства $n^\beta - 1 \leqslant a_{n+1} - a_n \leqslant 2n^\beta + 1$.*

Доказательство. Поскольку $n^{1+\beta} - 1 < a_n \leqslant n^{1+\beta}$, достаточно доказать, что $n^\beta \leqslant (n+1)^{1+\beta} - n^{1+\beta} \leqslant 2n^\beta$, или

$$1 \leqslant (n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^\beta - n \leqslant 2. \qquad (*)$$

Применяя лемму 1, получаем

$$(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^\beta - n \geqslant (n+1)\,\frac{n+1+\beta}{n+1} - n = 1+\beta > 1,$$

что доказывает левое неравенство. Аналогично, для правого имеем

$$(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^\beta - n \leqslant \frac{(n+1)(n+\beta)}{n} - n = \frac{n(1+\beta)+\beta}{n} < 2. \ \square$$

Перейдём к решению задачи. Покажем, что число $N = 2^{2017} + 1000$ подходит. Для этого достаточно доказать, что при любом натуральном $n \geqslant 2^{2017}$ число с пятёркой в десятичной записи найдётся даже среди чисел $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+1000}$. Поскольку $n \geqslant 2^{2017}$, найдётся натуральное k такое, что $10^{k-1} \leqslant n^\beta/2 < 10^k$. Покажем, что даже среди $(k+2)$-х с конца цифр чисел $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+1000}$ встретится пятёрка, откуда и будет следовать требуемое.

По лемме 2, при каждом $d = n, n+1, \ldots, n+999$ имеем

$$a_{d+1} - a_d \leqslant 2d^\beta + 1 \leqslant 2\cdot(2n)^\beta + 1 < 4\cdot n^\beta + 1 < 9\cdot 10^k;$$

это означает, что $(k+2)$-я цифра при переходе от a_d к a_{d+1} либо не изменяется, либо увеличивается на 1 (при этом 9 переходит в 0).

С другой стороны, по той же лемме

$$a_{d+100} - a_d \geqslant 100(n^\beta - 1) \geqslant 2\cdot 10^{k+1} - 100 \geqslant 10^{k+1};$$

это означает, что за 100 таких переходов $(k+2)$-я цифра обязана хотя бы раз изменить своё значение (на следующее по циклу). Значит, за 1000 переходов она примет все 10 возможных значений, в частности, побывает и пятёркой.

11.8. Изначально в левом нижнем и правом нижнем углах доски 2018×2018 стоят два *скакуна* — красный и синий, соответственно. Коля и Саша ходят по очереди; начинает Коля. За ход игрок перемещает своего скакуна (Коля — красного, а Саша — синего), сдвигая его одновременно на 20 клеток по одной из координат и на 17 по другой; при этом скакун не может вставать на клетку, занятую другим скакуном. Запрещено создавать позицию, которая уже встречалась в игре (позиции совпадают, если в них красный скакун стоит на одном и том же поле, и синий — тоже). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре? (*И. Богданов, М. Дидин*)

Ответ. Саша.

Решение. Приведём стратегию, позволяющую Саше выиграть. Раскрасим всю доску шахматным образом. Обозначим через K и S поля, на которых исходно стоят красный (k) и синий (s) скакуны соответственно; эти поля разного цвета. Нетрудно понять, что от S до K можно дойти ходами скакуна; поскольку скакун каждый раз прыгает на клетку другого цвета, количество ходов в таком пути нечётно. Выберем один такой путь $S = S_1, K_1, S_2, K_2, \ldots, S_n, K_n = K$, в котором поля не повторяются. Позицию в игре будем обозначать парой (A, B), где A и B — поля, на которых стоят k и s соответственно.

Саша будет действовать следующим образом. Если s стоит на S_i, Саша всегда перемещает его на K_i. Если s стоит на K_i, то сашин ход зависит от положения k: если тот стоит на K, то Саша ходит на S_{i+1}, иначе — на S_i.

Заметим сразу, что количество позиций в игре конечно, так что игра рано или поздно закончится. Значит, если Саша всегда может сходить согласно стратегии, то рано или поздно не сможет сделать ход Коля. Осталось показать, что Саша всегда сможет так сходить. После хода Коли скакуны находятся на полях одного цвета, так что стратегия не может предписывать идти на поле, занятое k.

Пусть до некоторого момента Саша ходил согласно стратегии, и перед очередным его ходом s стоит на одном из полей S_i или K_i (а k — на некотором поле U). Опишем множество уже встречавшихся позиций, в которых s стоял на S_i или K_i. Впервые s появился на S_i в позиции (K, S_i) перед колиным ходом (возможно, это было начало игры). Затем после каждой пары ходов Коли и Саши были использованы (в некотором порядке) позиции (X, S_i) и (X, K_i) при некотором поле $X \neq K$.

Итак, если перед ходом Саши s стоит на S_i, а k — на поле U, то позиция (U, K_i) не встречалась раньше. Если s стоит на K_i, а k — на поле $U \neq K$, то позиция (U, S_i) также не встречалась раньше. Значит, в обоих случаях Саша может сделать ход согласно стратегии. Наконец, если s стоит на K_i, а k — на поле $U = K$, то $i < n$ (иначе скакуны бы стояли на одном поле), так что поле S_{i+1} существует, и s на нём ещё не был. Поэтому Саша может сходить туда. Доказательство окончено.