Материалы для проведения заключительного этапа

XLV ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2018–2019 учебный год

Первый день

Пермь, 21–27 апреля 2019 г.

Москва, 2019

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа XLV Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, Е. В. Бакаев, Д. А. Белов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, С. Г. Волчёнков, А. А. Гайфуллин, Н. А. Гладков, М. А. Григорьев, М. А. Дидин, О. Ю. Дмитриев, В. Л. Дольников, С. А. Дориченко, Л. А. Емельянов, А. П. Зимин, К. А. Кноп, П. А. Кожевников, П. Ю. Козлов, Д. Н. Крачун, С. О. Кудря, А. А. Кузнецов, Ю. В. Кузьменко, А. Н. Магазинов, Е. Г. Молчанов, О. С. Нечаева, О. К. Подлипский, И. С. Рубанов, А. Р. Сафиуллина, К. А. Сухов, Д. А. Терёшин, Б. В. Трушин, И. И. Фролов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков, О. И. Южаков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Компьютерный макет: А. И. Голованов.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.1. На плоскости отмечены 5 точек. Докажите, что можно выбрать некоторые из них и переместить их так, чтобы расстояние между любыми двумя перемещёнными точками не изменилось, а в результате на плоскости осталось множество из 5 точек, симметричное относительно некоторой прямой. (*С. Волчёнков*)

Решение. Обозначим данные точки через A, B, C, D и E. Выберем из них две самые удалённые друг от друга, пусть это A и B. Покажем, что можно переместить их требуемым образом.

Проведём серединный перпендикуляр α к отрезку CD. Если E лежит на α, то достаточно переместить точки A и B на прямую α. Иначе пусть E' — точка, симметричная E относительно α. Заметим, что расстояние от E до α меньше длины одного из отрезков EC и ED, то есть меньше AB.

Таким образом, можно переместить точку A в точку E', а точку B — в точку, лежащую на α и удалённую от E' на расстояние AB. Легко видеть, что α — ось симметрии нового множества точек, что и требовалось.

9.2. При каком наименьшем натуральном n существуют такие целые $a_1, a_2, \ldots, a_n$, что квадратный трёхчлен

$$x^2 - 2\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right)^2 x + \left(a_1^4 + a_2^4 + \ldots + a_n^4 + 1\right)$$

имеет по крайней мере один целый корень? (*П. Козлов*)

Ответ. При $n = 6$.

Решение. При $n = 6$ можно положить $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$ и $a_5 = a_6 = -1$; тогда трёхчлен из условия принимает вид $x^2 - 8x + 7$ и имеет два целых корня: 1 и 7. Осталось показать, что это — наименьшее возможное значение n.

Пусть числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ удовлетворяют условию задачи; тогда делённый на 4 дискриминант квадратного трёхчлена из условия должен быть полным квадратом. Он равен

$$d = \left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right)^4 - \left(a_1^4 + a_2^4 + \ldots + a_n^4 + 1\right).$$

Тогда число d нечётно и является квадратом, поэтому оно даёт остаток 1 при делении на 8.

Перепишем равенство выше в виде

$$d + 1 + a_1^4 + a_2^4 + \ldots + a_n^4 = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^4$$

и рассмотрим его по модулю 8. Нетрудно проверить, что четвёртые степени целых чисел дают лишь остатки 0 и 1 при делении на 8, то есть правая часть равенства даёт остаток 0 или 1. Левая же часть сравнима с $1 + 1 + k$, где k — количество нечётных чисел среди a_i. Значит, $n \geqslant k \geqslant 6$.

9.3. Окружность Ω с центром в точке O описана около остроугольного треугольника ABC, в котором $AB < BC$; его высоты пересекаются в точке H. На продолжении отрезка BO за точку O отмечена точка D такая, что $\angle ADC = \angle ABC$. Прямая, проходящая через точку H параллельно прямой BO, пересекает меньшую дугу AC окружности Ω в точке E. Докажите, что $BH = DE$.

(*А. Кузнецов*)

Решение. Пусть P — вторая точка пересечения BO с окружностью Ω (см. рис. 1). Тогда BP — диаметр Ω, и $\angle BCP = 90° = \angle BAP$. Значит, $CP \parallel AH$ и $AP \parallel CH$. Следовательно, четырёхугольник $AHCP$ — параллелограмм. Обозначим через M точку пересечения его диагоналей. Она является серединой отрезков PH и AC.

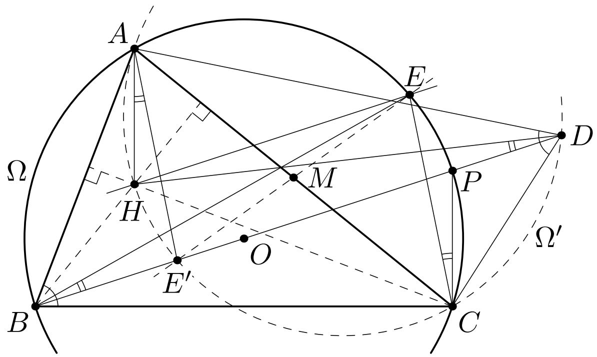

Рис. 1

При симметрии относительно точки M точка A переходит в точку C, а точка P — в точку H. Пусть при этой симметрии точка E переходит в E', а окружность Ω — в Ω'. Тогда точки A,

H, E' и C лежат на Ω'. Поскольку $\angle ADC = \angle ABC = 180^\circ - \angle AHC$, точка D также лежит на Ω'.

В силу симметрии, $\angle ECP = \angle E'AH$, а также $PE' \parallel HE$ — поэтому точка E' лежит на прямой PB. Из вписанности четырёхугольников $AHE'D$ и $BEPC$ получаем, что $\angle EBP = \angle ECP = \angle E'AH = \angle E'DH$. Таким образом, $\angle EBD = \angle BDH$. Это означает, что трапеция $BHED$ — равнобокая, поэтому $BH = DE$.

9.4. В лагерь приехали 10000 детей, каждый дружит ровно с 11 другими детьми в лагере (дружба взаимна). Каждый ребёнок носит футболку одного из семи цветов радуги, причём у любых двух друзей цвета различны. Вожатые потребовали, чтобы какие-нибудь дети (хотя бы один) надели футболки других цветов (из тех же семи). Опрос показал, что 100 детей менять цвет не намерены. Докажите, что некоторые из остальных детей всё же могут изменить цвета своих футболок так, чтобы по-прежнему у любых двух друзей цвета были различны.

(*А. Магазинов*)

Решение. Перейдём к графу, вершины которого соответствуют детям, а рёбра — дружбам. Напомним, что раскраска вершин называется *правильной*, если цвета любых двух вершин, соединённые ребром, различны. Таким образом, граф правильно раскрашен в 7 цветов, в нём выделено 100 *стабильных* вершин, и требуется перекрасить часть остальных вершин так, чтобы раскраска осталась правильной.

Предположим, что это невозможно. Пронумеруем цвета числами $1, 2, \ldots, 7$. Рассмотрим любые два цвета $i < j$. Оставим в графе только вершины этих цветов и рёбра между ними; обозначим полученный граф через G_{ij}. Этот граф может распасться на несколько компонент связности; обозначим через c_{ij} их количество. Если $c_{ij} > 100$, то в одной из компонент нет стабильных вершин; тогда можно изменить цвет каждой вершины в этой компоненте, заменив i на j и наоборот, и добиться требуемой альтернативной раскраски.

Значит, $c_{ij} \leqslant 100$ при всех i и j. Заметим, что каждая компонента связности, содержащая x вершин, содержит не менее

$x-1$ рёбер; значит, если в G_{ij} есть v_{ij} вершин, то количество рёбер в нём e_{ij} не меньше, чем $v_{ij}-c_{ij}$, то есть

$$e_{ij} \geqslant v_{ij} - 100. \tag{$*$}$$

С другой стороны, нетрудно найти сумму V всех чисел v_{ij} и сумму E всех чисел e_{ij}. Действительно, в исходном графе 10000 вершин, и каждая из них участвует в 6 графах вида G_{ij}; поэтому $V = 6 \cdot 10000 = 60000$. С другой стороны, в исходном графе $11 \cdot 10000/2 = 55000$ рёбер, и каждое участвует ровно в одном графе G_{ij}; поэтому $E = 55000$.

Но, поскольку пар цветов всего $C_7^2 = 21$, неравенство $(*)$ влечёт $E \geqslant V - 21 \cdot 100$, что не так для найденных значений. Значит, наше предположение было неверно, и требуемая перекраска возможна.

10 класс

10.1. В каждой точке A плоскости стоит вещественное число $f(A)$. Известно, что если M — точка пересечения медиан треугольника ABC, то $f(M) = f(A) + f(B) + f(C)$. Докажите, что $f(A) = 0$ для всех точек A. *(А. С. Голованов)*

Решение. Возьмём произвольную точку M плоскости и докажем, что $f(M) = 0$. Для этого рассмотрим произвольный треугольник ABC, для которого точка M является точкой пересечения медиан. Обозначим через D, E и F точки пересечения медиан треугольников BCM, CAM и ABM, соответственно (см. рис. 2).

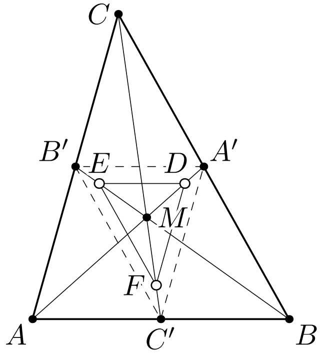

Рис. 2

Заметим, что точка M также является точкой пересечения медиан треугольника DEF. В самом деле, обозначим через A', B' и C' середины отрезков BC, CA и AB, соответственно. Тогда треугольник DEF получается из треугольника ABC гомотетией в точке M с коэффициентом $-\frac{1}{3}$, поскольку при гомотетии с коэффициентом $-\frac{1}{2}$ треугольник ABC переходит в $A'B'C'$, а при последующей гомотетии с коэффициентом $\frac{2}{3}$ — в треугольник DEF.

Но тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$f(M) = f(D) + f(E) + f(F) = (f(M) + f(B) + f(C)) + \\ + (f(M) + f(C) + f(A)) + (f(M) + f(A) + f(B)) = \\ = 2(f(A) + f(B) + f(C)) + 3f(M) = 5f(M),$$

из чего следует, что $f(M) = 0$, что и требовалось доказать.

10.2. Паша и Вова играют в следующую игру, делая ходы по очереди. Начинает Паша. Изначально перед мальчиками лежит большой кусок пластилина. За один ход Паша может разрезать любой из имеющихся кусков пластилина на три части (не обязательно равные). Вова своим ходом выбирает два куска и слепляет их вместе. Паша побеждает, если в некоторый момент среди имеющихся кусков пластилина окажется 100 кусков одинаковой массы. Может ли Вова помешать Паше победить?

(*Р. Ефремов, Д. Белов*)

Ответ. Нет, не может.

Первое решение. Приведём алгоритм, позволяющий Паше победить. Пусть масса исходного куска равна 1 кг. Паша каждым ходом будет отрезать от самого большого из имеющихся кусков два куска массой по 0,01 г. Докажем, что не позже, чем через 10 000 ходов Паша победит.

Предположим, что это не так. Рассмотрим 100 последовательных ходов Паши. Всего за эти 100 ходов появятся 200 кусков массой 0,01 г. Если бы каждым своим ответным ходом Вова слеплял два куска массой по 0,01 г, то в итоге получилось бы 100 кусков массой 0,02 г, и Паша бы победил. Значит, по крайней мере один раз Вова не слепит между собой два куска массой 0,01 г. Поэтому спустя 100 ходов Паши и 100 ходов Вовы количество кусков массой 0,01 г увеличится хотя бы на 1.

Разобьём 10 000 ходов Паши на сотни последовательных. По доказанному выше, после каждой сотни последовательных ходов Паши и ответных ходов Вовы количество кусков массы 0,01 г увеличивается хотя бы на 1. Таким образом, через 100 таких сотен последовательных ходов количество кусков массой 0,01 г увеличится хотя бы на 100. Поэтому Паша так или иначе победит.

Второе решение. Опять же положим массу исходного куска равной 1 кг. Приведём другой алгоритм действий Паши. Пока это возможно, он будет добиваться выполнения следующего условия: $(*)$ массы всех кусков на столе составляют целое число граммов. Заметим, что Вова своим ходом не может нарушить $(*)$.

Если перед ходом Паши на столе есть кусок массой хотя бы 3 г, он может отрезать от него два куска по 1 г, сохраняя $(*)$. Значит, если Паша не может сделать ход, каждый кусок весит либо 1 г, либо 2 г (такой момент обязательно наступит, так как количество кусков перед ходом Паши растёт). Но тогда он уже выиграл: в противном случае общая масса всех кусков (в граммах) меньше $1 \cdot 100 + 2 \cdot 100 = 300$, что не так.

10.3. В межгалактической гостинице есть 100 комнат вместимостью

101, 102, ..., 200 человек. В этих комнатах суммарно живёт n человек. В гостиницу приехал VIP-гость, для которого нужно освободить целую комнату. Для этого директор гостиницы выбирает одну комнату и переселяет всех её жителей в одну и ту же другую комнату. При каком наибольшем n директор гостиницы всегда может таким образом освободить комнату независимо от текущего расселения? (*Д. Белов, А. Сафиуллина*)

Ответ. 8824.

Решение. Предположим, что при 8824 постояльцах директор не может осуществить переселение. Разобьём комнаты на пары по вместимости: $101 - 200$, $102 - 199$, ..., $150 - 151$. Отметим, что для каждой пары комнат суммарное количество человек, живущих в двух комнатах, больше, чем вместимость большей комнаты из пары, иначе всех человек из этой пары можно было бы собрать в комнате с большей вместимостью. Таким образом, общее количество человек не меньше $201 + 200 + 199 + {} + \ldots + 152 = 353 \cdot 25 = 8825$. Поэтому при 8824 постояльцах директор может освободить комнату.

Теперь приведём пример, доказывающий, что при 8825 и более постояльцах существует расселение, в котором освободить комнату указанным образом не удастся.

Упорядочим комнаты по возрастанию вместимости. Пусть в первых пятидесяти комнатах живёт по 76, а в комнате вместимости k при $151 \leqslant k \leqslant 200$ живёт $k - 75$ человек. Посчитаем количество человек, живущих в гостинице:

$$76 \cdot 50 + (76 + 77 + 78 + \ldots + 125) =$$
$$= 3800 + 201 \cdot 25 = 3800 + 5025 = 8825.$$

Рассмотрим две произвольные комнаты вместимости $a < b$. Заметим, что в комнате вместимости b живёт не меньше $b - 75$ человек, а в комнате a — не меньше 76 человек. Таким образом, переселить людей из одной комнаты в другую ни для какой пары комнат не удастся, поэтому пример подходит. Если $n > 8825$, то достаточно селить оставшихся людей поочерёдно в любые комнаты, где ещё остаются свободные места.

10.4. Дан остроугольный треугольник ABC, в котором $AC < BC$. Окружность проходит через точки A и B и пересекает отрезки CA и CB повторно в точках A_1 и B_1 соответственно. Описанные окружности треугольников ABC и A_1B_1C пересекаются повторно в точке P. Отрезки AB_1 и BA_1 пересекаются в точке S. Точки Q и R симметричны S относительно прямых CA и CB. Докажите, что точки P, Q, R и C лежат на одной окружности.

(*Д. Прокопенко*)

Решение. Используя окружности $(PABC)$ и (PA_1B_1C), получаем $\angle PAB = 180^\circ - \angle PCB = \angle PA_1B_1$ и аналогично $\angle PBA = \angle PB_1A_1$. Тем самым, $\triangle PAB \sim \triangle PA_1B_1$. Из этого подобия вытекает, что $\angle APA_1 = \angle APB \pm \angle BPA_1 = \angle BPB_1$ и $PA/PA_1 = PB/PB_1$. Следовательно $\triangle PAA_1 \sim \triangle PBB_1$, и существует поворотная гомотетия h с центром P, переводящая $\overrightarrow{AA_1}$ в $\overrightarrow{BB_1}$. Угол поворота для h равен $\angle APB = \angle ACB$ (см. рис. 3).

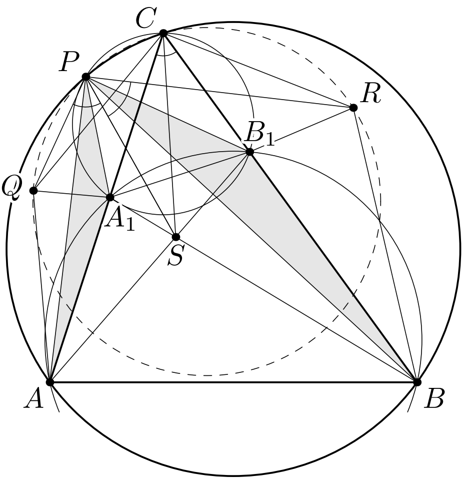

Рис. 3

Треугольник A_1QA равен треугольнику A_1SA, который в свою очередь подобен треугольнику B_1SB (так как AA_1B_1B — вписанный). Итак, треугольники A_1QA и B_1SB подобны и одинаково ориентированы, поэтому $S = h(Q)$ и, значит, $\angle QPS = \angle ACB$. Аналогично, $\angle SPR = \angle ACB$. Тогда $\angle QPR = 2\angle ACB$.

Но $\angle QCR = \angle QCA + \angle ABC + \angle BCR = \angle ACS + \angle ABC +$

$+ \angle SCB = 2\angle ABC$. Итак, мы доказали равенство $\angle QPR = \angle QCR$, из которого следует утверждение задачи.

Замечание 1. Фактически в решении используется известное описание точки Микеля четверки прямых AB, CA, BC, A_1B_1 как центра поворотной гомотетии, переводящей $\overrightarrow{AA_1}$ в $\overrightarrow{BB_1}$.

Замечание 2. Равенства углов $\angle QPS = \angle ACB = \angle SPR$ можно доказать разными способами. Укажем ещё одну из возможных схем.

Пусть Q_1 и R_1 — проекции S на CA и CB соответственно. Можно показать, что точки C, P, Q_1, R_1, S лежат на одной окружности Γ с диаметром CS. Прямые CP, A_1B_1 и AB — радикальные оси трёх окружностей из условия, они пересекаются в одной точке S'. Отсюда несложно понять, что четвёрка прямых CA, CP, CB, CS гармоническая. Проецируя из C на Γ, получаем, что SQ_1PR_1 гармонический. Отсюда $PR_1/R_1S = PQ_1/Q_1S = PQ_1/Q_1Q$, откуда $\triangle PQ_1S \sim \triangle PR_1R$ (а также $\triangle PQ_1Q \sim \triangle PR_1S$), из чего следуют нужные равенства углов.

11 класс

11.1. В каждой точке A плоскости стоит вещественное число $f(A)$. Известно, что если M — точка пересечения медиан треугольника ABC, то $f(M) = f(A) + f(B) + f(C)$. Докажите, что $f(A) = 0$ для всех точек A. *(А. С. Голованов)*

Решение. Возьмём произвольную точку M плоскости и докажем, что $f(M) = 0$. Для этого рассмотрим произвольный треугольник ABC, для которого точка M является точкой пересечения медиан. Обозначим через D, E и F точки пересечения медиан треугольников BCM, CAM и ABM, соответственно (см. рис. 4).

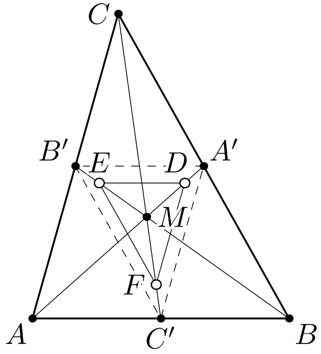

Рис. 4

Заметим, что точка M также является точкой пересечения медиан треугольника DEF. В самом деле, обозначим через A', B' и C' середины отрезков BC, CA и AB, соответственно. Тогда треугольник DEF получается из треугольника ABC гомотетией в точке M с коэффициентом $-\frac{1}{3}$, поскольку при гомотетии с коэффициентом $-\frac{1}{2}$ треугольник ABC переходит в $A'B'C'$, а при последующей гомотетии с коэффициентом $\frac{2}{3}$ — в треугольник DEF.

Но тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$f(M) = f(D) + f(E) + f(F) = (f(M) + f(B) + f(C)) + \\ + (f(M) + f(C) + f(A)) + (f(M) + f(A) + f(B)) = \\ = 2(f(A) + f(B) + f(C)) + 3f(M) = 5f(M),$$

из чего следует, что $f(M) = 0$, что и требовалось доказать.

11.2. Верно ли, что при любых ненулевых целых числах a и b система

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(13x)\operatorname{tg}(ay)=1, \\ \operatorname{tg}(21x)\operatorname{tg}(by)=1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение? *(М. Антипов)*

Ответ. Нет.

Решение. Покажем, что система не будет иметь решений при $a = 8$, $b = 13$. Действительно, из уравнений системы выте-

кает, что
$$13x + ay = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad 21x + by = \frac{\pi}{2} + \pi \ell$$
при целых k и ℓ. Отсюда следует
$$(21a - 13b)y = 21(13x + ay) - 13(21x + by) = \pi(4 + 21k - 13\ell).$$
При $a = 8$, $b = 13$ получаем $y = (13\ell - 21k - 4)\pi$, а значит, $\operatorname{tg}(ay) = 0$. Поэтому первое уравнение системы не может выполняться.

Замечание. . Числа a и b такие, что $|21a - 13b| = 1$, можно найти, применив алгоритм Евклида к паре взаимно простых чисел $(21, 13)$. На самом деле, в условии задачи можно заменить числа 21 и 13 на любую пару взаимно простых чисел, и ответ не изменится. Можно также заметить, что 13 и 21 — последовательные числа Фибоначчи, поэтому равенство $|21 \cdot 8 - 13 \cdot 13| = 1$ является частным случаем общего факта $|F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2| = 1$.

11.3. Даны n монет попарно различных масс и n чашечных весов, $n > 2$. При каждом взвешивании разрешается выбрать какие-то одни весы, положить на их чаши по одной монете, посмотреть на показания весов и затем снять монеты обратно. Какие-то одни из весов (неизвестно, какие) испорчены и могут выдавать случайным образом как правильный, так и неправильный результат. За какое наименьшее количество взвешиваний можно заведомо найти самую тяжёлую монету? (*М. Дидин*)

Ответ. За $2n - 1$ взвешивание.

Решение. Докажем сначала, что за $2n - 1$ взвешивание можно найти самую тяжёлую монету. Более точно, мы докажем по индукции по n, что самую тяжёлую из $n \geqslant 2$ данных монет можно определить за $2n - 1$ взвешивание, имея трое весов, одни из которых, возможно, испорчены.

Если $n = 2$, то взвесим данные две монеты по очереди на трёх разных весах. Если при одном из взвешиваний весы оказались в равновесии, то эти весы испорчены, значит, мы можем определить более тяжёлую монету по показаниям любых из остальных весов. Если равновесия ни разу не было, то какая-то из монет перевесит хотя бы два раза — она и есть более тяжёлая, так как неверный результат могут давать только одни весы. Это даёт базу индукции.

Пусть теперь $n \geqslant 3$. Выберем две монеты и двое весов и сравним за первые два взвешивания эти монеты друг с другом на первых и на вторых весах. Возможны два случая:

1. Оба раза перевешивала одна и та же из двух монет; назовём её монетой a, а вторую из них — монетой b. Так как хотя бы одни из двух весов правильные, то монета a действительно тяжелее монеты b. Значит, b не самая тяжёлая. Задача сводится к тому, чтобы определить самую тяжёлую из $n-1$ монеты: монеты a и $n-2$ монет, не участвовавших в первых двух взвешиваниях. По предположению индукции мы можем сделать это за $2n-3$ взвешивания. Вместе с первыми двумя взвешиваниями получаем $2n-1$ взвешивание.

2. Либо одно из первых двух взвешиваний дало равновесие, либо результаты первых двух взвешиваний противоречат друг другу: один раз перевесила одна монета, а другой — другая. Значит, одни из двух использованных весов точно испорчены. Возьмём третьи весы. Тогда они обязательно правильные. Используя их, мы легко можем определить самую тяжёлую монету за $n-1$ взвешивание: сравниваем первую монету со второй, более тяжёлую из них с третьей, более тяжёлую из них с четвёртой и т. д. до последней. Вместе с первыми двумя взвешиваниями получаем $n+1 < 2n-1$ (так как $n > 2$) взвешивание.

Покажем теперь, что менее, чем за $2n-1$ взвешивание, заведомо определить самую тяжёлую монету нельзя. Достаточно показать, что её нельзя определить ровно за $2n-2$ взвешивания, так как можно добавить произвольные взвешивания и игнорировать их результаты. Предположим противное: имеется алгоритм действий, позволяющий определить самую тяжёлую монету за $2n-2$ взвешивания.

Пронумеруем монеты числами $1, \ldots, n$. Сделаем первые $2n-3$ взвешивания согласно алгоритму. Предположим, что в каждом из них перевешивала монета с бóльшим номером. Согласно принципу Дирихле, среди монет с номерами $1, \ldots, n-1$ найдётся такая, которая за произведённые $2n-3$ взвешиваний «проигрывала» (оказывалась более лёгкой) не более одного раза; обозначим номер этой монеты через k. Конечно же, монета с номером n ни разу не «проигрывала». Покажем, что такие результаты взвешиваний возможны. Действительно, такое могло произойти по крайней мере в следующих двух ситуациях.

(А) Монеты упорядочены по возрастанию масс и все весы (в том числе, испорченные) показывали правильные результаты во всех взвешиваниях.

(Б) Монеты упорядочены по возрастанию масс, за исключением монеты номер k, которая самая тяжёлая. При этом те весы, на которых монета номер k «проиграла», испорчены, и в этом взвешивании показали неверный результат, а в остальных взвешиваниях все весы показывали верные результаты.

Рассмотрим два случая.

1. В последнем, $(2n-2)$-м взвешивании, не участвует монета с номером k. Предположим, что опять перевесила монета с бо́льшим номером. Тогда каждая из ситуаций (А) и (Б) по-прежнему возможна.

2. В последнем взвешивании участвует монета с номером k. Предположим, что она перевесила. Тогда, с одной стороны, возможно, что имеет место ситуация (А), и последнее взвешивание выполнялось на испорченных весах. С другой стороны, возможно, что имеет место ситуация (Б), и в последнем взвешивании весы показали правильный результат.

Итак, каким бы ни было одно оставшееся взвешивание, его результат может быть таков, что после него каждая из ситуаций (А) и (Б) будет по-прежнему возможной. Тогда каждая из монет k и n может быть самой тяжёлой, то есть нам не удалось определить самую тяжёлую монету.

11.4. Дана треугольная пирамида $ABCD$. Сфера ω_A касается грани BCD, а также плоскостей остальных граней вне самих граней. Аналогично, сфера ω_B касается грани ACD, а также плоскостей остальных граней вне самих граней. Пусть K — точка касания сферы ω_A с плоскостью ACD, а L — точка касания сферы ω_B с плоскостью BCD. На продолжениях отрезков AK и BL за точки K и L выбраны точки X и Y соответственно так, что $\angle CKD = \angle CXD + \angle CBD$ и $\angle CLD = \angle CYD + \angle CAD$. Докажите, что точки X и Y равноудалены от середины отрезка CD.

(*Ф. Бахарев*)

Решение. Отметим точки K_1 и L_1 касания вписанной сферы ω тетраэдра с гранями ACD и BCD соответственно, а также точки K_2 и L_2 касания сфер ω_B и ω_A с этими гранями. Сферы ω и ω_A гомотетичны с центром в точке A, поэтому точка K_1 лежит на отрезке AK. Аналогично, точка L_1 лежит на отрезке BL.

Покажем, что точки L_1 и L_2 изогонально сопряжены относительно треугольника BCD, то есть $\angle BCL_1 = \angle DCL_2$, $\angle DBL_1 = \angle CBL_2$ и $\angle CDL_1 = \angle BDL_2$. Докажем первое из этих равенств; остальные два доказываются аналогично. Обозначим через M_1 и M точки касания плоскости ABC со сферами ω и ω_A соответственно (см. рис. 5). Из равенства отрезков касательных, проведённых из одной точки к сфере, следует, что следующие пары треугольников равны по трём сторонам: $\triangle CK_1D = \triangle CL_1D$, $\triangle AK_1C = \triangle AM_1C$, $\triangle BL_1C = \triangle BM_1C$, $\triangle CL_2D = \triangle CKD$, $\triangle BL_2C = \triangle BMC$, $\triangle AKC = \triangle AMC$. Значит, $\angle BCL_1 + \angle BCL_2 = \angle BCM_1 + \angle BCM = \angle ACM - \angle ACM_1 = \angle ACK - \angle ACK_1 = \angle DCK_1 + \angle DCK = \angle DCL_1 + \angle DCL_2$, откуда следует требуемое равенство $\angle BCL_1 = \angle DCL_2$.

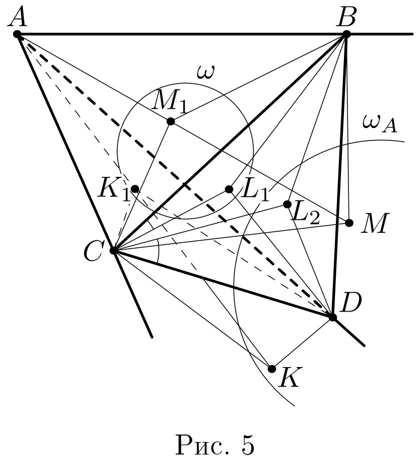

Рис. 5

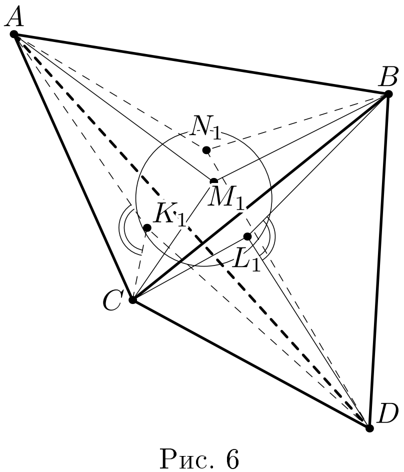

Рис. 6

Используя условие задачи и доказанную изогональную сопряжённость точек L_1 и L_2, получаем, что $\angle CXD = \angle CKD - \angle CBD = \angle CL_2D - \angle CBD = \angle BCL_2 + \angle BDL_2 = \angle DCL_1 + \angle CDL_1 = 180^\circ - \angle CL_1D = 180^\circ - \angle CK_1D$. Следовательно, четырёхугольник CK_1DX вписанный. Аналогично устанавливается вписанность четырёхугольника CL_1DY.

Обозначим через N_1 точку касания сферы ω и грани ABD. Из равенства треугольников $\triangle AK_1C = \triangle AM_1C$ и равенства аналогичных пар треугольников, примыкающих к пяти остальным рёбрам тетраэдра $ABCD$, получаем (см. рис. 6), что $2\angle AK_1C = \angle AK_1C + \angle AM_1C = (360^\circ - \angle AK_1D - \angle CK_1D) + (360^\circ - \angle AM_1B - \angle BM_1C) = 360^\circ - \angle AN_1D - \angle CL_1D + 360^\circ - \angle AN_1B - \angle BL_1C = \angle BL_1D + \angle BN_1D = 2\angle BL_1D$. Так как точки K_1 и L_1 лежат на отрезках AX и BY соответственно, отсюда следует, что $\angle CK_1X = \angle DL_1Y$.

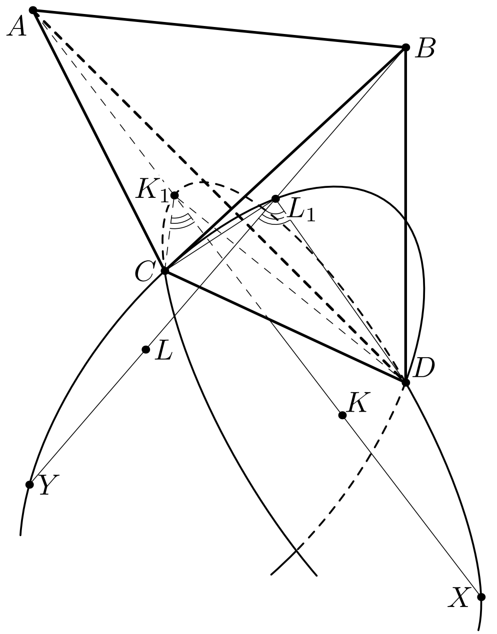

Рис. 7

Повернём плоскость BCD вокруг прямой CD так, чтобы она совместилась с плоскостью ACD и при этом треугольник CL_1D совместился с равным ему треугольником CK_1D. При этом повороте окружность, описанная около четырёхугольника CL_1DY, перейдёт в окружность γ, описанную около четырёхугольника CK_1DX. В частности, точка Y перейдёт в некоторую точку Y' на окружности γ. Из равенства углов $\angle CK_1X = \angle DL_1Y = \angle DK_1Y'$ следует, что точки X и Y' симметричны относительно диаметра окружности γ, перпендикулярного хорде CD. Следовательно, точки X и Y', а значит, и точки X и Y равноудалены от середины отрезка CD.