Материалы для проведения заключительного этапа

XLV ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2018–2019 учебный год

Второй день

Пермь, 21–27 апреля 2019 г.

Москва, 2019

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа XLV Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, Е. В. Бакаев, Д. А. Белов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, С. Г. Волчёнков, А. А. Гайфуллин, Н. А. Гладков, М. А. Григорьев, М. А. Дидин, О. Ю. Дмитриев, В. Л. Дольников, С. А. Дориченко, Л. А. Емельянов, А. П. Зимин, К. А. Кноп, П. А. Кожевников, П. Ю. Козлов, Д. Н. Крачун, С. О. Кудря, А. А. Кузнецов, Ю. В. Кузьменко, А. Н. Магазинов, Е. Г. Молчанов, О. С. Нечаева, О. К. Подлипский, И. С. Рубанов, А. Р. Сафиуллина, К. А. Сухов, Д. А. Терёшин, Б. В. Трушин, И. И. Фролов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков, О. И. Южаков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Компьютерный макет: А. И. Голованов.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Запрещается публикация или размещение в сети Интернет условий или решений задач олимпиады.

Условия и решения задач

9 класс

9.5. В детском саду воспитательница взяла $n > 1$ одинаковых картонных прямоугольников и раздала их n детям, каждому по прямоугольнику. Каждый ребёнок разрезал свой прямоугольник на несколько одинаковых квадратиков (квадратики у разных детей могли быть разными). Оказалось, что общее количество квадратиков — простое число. Докажите, что исходные прямоугольники были квадратами. (*С. Берлов*)

Решение. Предположим противное: пусть прямоугольники имели размеры $k \times \ell$, где $\ell < k$. Пусть a_i — длина стороны квадрата у i-го ребёнка. Тогда каждая сторона прямоугольника составлена из нескольких отрезков длиной a_i, то есть $\ell = b_i a_i$ и $k = c_i a_i$, где b_i и c_i — натуральные числа. При этом у ребёнка получилось $b_i c_i$ квадратиков.

Заметим, что $1 < k/\ell = c_i/b_i$, то есть число k/ℓ рационально. Пусть s/t — его несократимая запись; тогда $s > 1$, и c_i делится на s при всех i. Значит, и число квадратиков у i-го ребёнка делится на s. Тогда общее число квадратиков Q также делится на $s > 1$, и притом $Q > s$ (поскольку количество детей больше 1). Значит, Q — составное число; противоречие.

9.6. На стороне AC равнобедренного треугольника ABC с основанием BC взята точка D. На меньшей дуге CD окружности, описанной около треугольника BCD, выбрана точка K. Луч CK пересекает прямую, параллельную BC и проходящую через A, в точке T. Пусть M — середина отрезка DT. Докажите, что $\angle AKT = \angle CAM$. (*А. Кузнецов*)

Решение. Продлим отрезок AM на его длину за точку M, получим точку N такую, что $ADNT$ — параллелограмм. Поскольку $\angle ANT = \angle CAM$, для решения задачи достаточно показать, что $\angle AKT = \angle ANT$, или что точки A, T, N, K лежат на одной окружности (см. рис. 1).

Пусть ND пересекает AB в точке S; тогда $DS \parallel BC$, и

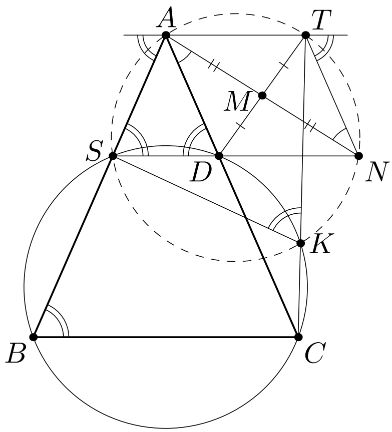

Рис. 1

$BSDC$ — равнобокая трапеция. Мы докажем, что точки K и N лежат на окружности ω, описанной около треугольника AST.

Имеем $\angle ATN = \angle ADN = 180^\circ - \angle SDA = 180^\circ - \angle ASD$, значит, N лежит на окружности ω. Из окружности, описанной около трапеции $BSDC$, имеем $\angle SKT = \angle SBC = 180^\circ - \angle SAT$, поэтому K лежит на окружности ω, что и требовалось доказать.

9.7. Среди 16 монет есть 8 *тяжёлых* — весом по 11 г, и 8 *лёгких* — весом по 10 г, но неизвестно, какие из монет какого веса. Одна из монет — юбилейная. Как за три взвешивания на двухчашечных весах без гирь узнать, является юбилейная монета тяжёлой или лёгкой? (*К. Кноп*)

Решение. Обозначим юбилейную монету через Ю. Отложим две неюбилейных монеты A и B, и разложим оставшиеся 14 монет по 7 на каждую чашу так, чтобы Ю попала на левую. Назовём монету *левой* или *правой*, если в этом взвешивании она попала на левую или правую чашу, соответственно.

Случай (=). Пусть чаши оказались в равновесии.

В этом случае либо на каждой чаше по 3 тяжёлых монеты (и тогда A и B обе тяжёлые), либо по 4 (тогда A и B лёгкие). В любом случае обе отложенных монеты одинаковы. В этом случае возьмём с левой чаши Ю и ещё одну монету C и сравним эту пару с парой A и B.

Подслучай (=, =). Пусть снова получено равновесие.

Тогда все 4 монеты A, B, C, Ю весят одинаково. Сравним их с любыми другими четырьмя левыми монетами. Если весы окажутся в равновесии, то все 8 монет во взвешикании — одного веса. Тогда среди левых монет было 6 монет такого веса; это невозможно. Значит. какая-то чаша перевесит, и мы узнаем, являлись A, B, C и Ю тяжёлыми или лёгкими.

Подслучай $(=,<)$. Чаша, содержащая Ю во втором взвешивании, легче.

Тогда на этой чаше не может быть двух тяжёлых монет. Сравнив эти две монеты друг с другом, мы в случае неравенства сразу узнаём вес Ю, а в случае равенства сможем сделать вывод о том, что обе монеты на этой чаше — лёгкие.

Подслучай $(=,>)$, когда чаша с Ю тяжелее, аналогичен.

Случай $(<)$. Пусть левая чаша в первом взвешивании оказалась легче.

Тогда среди левых монет не более трёх тяжёлых. Сравнив Ю с какой-нибудь левой монетой C, мы либо узнаем вес Ю (в случае неравенства), либо найдём две одинаковых монеты (Ю и C). Сравнив эту пару с другой парой левых монет, мы опять же узнаем вес Ю в случае неравенства. В случае же равенства мы найдём 4 левых монеты одного веса, одна из которых — Ю. Как уже отмечалось, они могут быть только лёгкими.

Случай $(>)$, когда в первом взвешивании чаша с Ю тяжелее, аналогичен предыдущему.

9.8. Даны числа a, b, c, не меньшие 1. Докажите, что

$$\frac{a+b+c}{4} \geqslant \frac{\sqrt{ab-1}}{b+c} + \frac{\sqrt{bc-1}}{c+a} + \frac{\sqrt{ca-1}}{a+b}\,.$$

(*К. Тыщук*)

Решение. По неравенству о средних имеем $b+c \geqslant 2\sqrt{bc}$, откуда

$$4\,\frac{\sqrt{ab-1}}{b+c} \leqslant 2\sqrt{\frac{ab-1}{bc}} = 2\sqrt{\left(a-\frac{1}{b}\right)\cdot\frac{1}{c}} \leqslant \left(a-\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{c}\,,$$

где в последнем переходе опять применено неравенство о средних. Аналогично выводятся неравенства

$$4\,\frac{\sqrt{bc-1}}{c+a} \leqslant \left(b-\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{a}\,, \quad 4\,\frac{\sqrt{ca-1}}{a+b} \leqslant \left(c-\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{b}\,.$$

Складывая три полученных неравенства, получаем требуемое.

Замечание. Равенство достигается при $a = b = c = \sqrt{2}$.

10 класс

10.5. В детском саду воспитательница взяла $n > 1$ одинаковых картонных прямоугольников и раздала их n детям, каждому по прямоугольнику. Каждый ребёнок разрезал свой прямоугольник на несколько одинаковых квадратиков (квадратики у разных детей могли быть разными). Оказалось, что общее количество квадратиков — простое число. Докажите, что исходные прямоугольники были квадратами. (*С. Берлов*)

Решение. Предположим противное: пусть прямоугольники имели размеры $k \times \ell$, где $\ell < k$. Пусть a_i — длина стороны квадрата у i-го ребёнка. Тогда каждая сторона прямоугольника составлена из нескольких отрезков длиной a_i, то есть $\ell = b_i a_i$ и $k = c_i a_i$, где b_i и c_i — натуральные числа. При этом у ребёнка получилось $b_i c_i$ квадратиков.

Заметим, что $1 < k/\ell = c_i/b_i$, то есть число k/ℓ рационально. Пусть s/t — его несократимая запись; тогда $s > 1$, и c_i делится на s при всех i. Значит, и число квадратиков у i-го ребёнка делится на s. Тогда общее число квадратиков Q также делится на $s > 1$, и притом $Q > s$ (поскольку количество детей больше 1). Значит, Q — составное число; противоречие.

10.6. В остроугольном треугольнике ABC проведена биссектриса BL. Точки D и E — соответственно середины меньших дуг AB и BC окружности ω, описанной около треугольника ABC. На продолжении отрезка BD за точку D отмечена точка P, а на продолжении отрезка BE за точку E — точка Q так, что $\angle APB = \angle CQB = 90^\circ$. Докажите, что середина отрезка BL лежит на прямой PQ. (*А. Кузнецов*)

Решение. Обозначим $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle ACB = 2\gamma$. Не умаляя общности считаем, что $\alpha \geqslant \gamma$. Поскольку точки D и E — середины дуг AB и AC окружности ω, имеем $\angle ABD = \dfrac{\angle ACB}{2} = \gamma$ и $\angle CBE = \alpha$.

Обозначим через M и N середины сторон AB и BC соответственно (см. рис. 2). Тогда MN — средняя линия треугольника ABC, она параллельна стороне AC и проходит через середину K отрезка BL. Также $\angle AMK = 180^\circ - \angle MAC = 180^\circ - 2\alpha$ и $\angle BNK = \angle BCA = 2\gamma$.

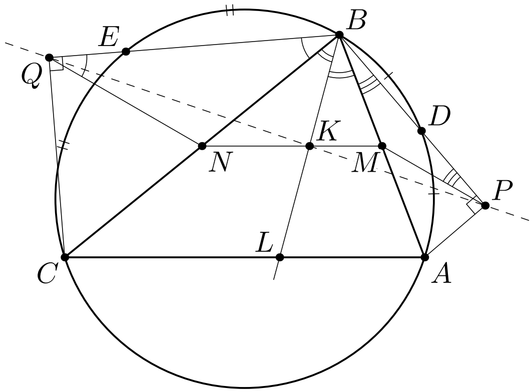

Рис. 2

Пусть $BM = MA = c$, $BN = NC = a$. Отрезок MP является медианой в прямоугольном треугольнике APB, поэтому $MP = c$ и $\angle MPB = \angle MBP = \gamma$; аналогично, $NQ = a$ и $\angle NQB = \alpha$. Следовательно, $\angle QNK = \angle BNK + \angle BNQ = 2\gamma + 180^\circ - 2\alpha$ и $\angle PMK = \angle AMK + \angle PMA = 180^\circ - 2\alpha + 2\gamma$. Так как $\alpha \geqslant \gamma$, то либо точки P и Q лежат на прямой MN, и в таком случае задача уже решена, либо точка P лежит в той же полуплоскости, что и точка A относительно прямой MN, а точка Q — в другой полуплоскости.

Заметим, что BK — биссектриса треугольника BMN, поэтому $MK/KN = c/a = MP/QN$. Вместе с равенством $\angle PMK = \angle QNK$ это означает, что треугольники PMK и QNK подобны. Значит, $\angle MKP = \angle NKQ$. Поскольку к тому же точки P и Q лежат в разных полуплоскостях относительно прямой MN, точки P, M и K лежат на одной прямой, что и требовалось доказать.

10.7. В математическом кружке занимаются 24 школьника. Каждую команду, состоящую из 6 школьников, руководитель считает либо *сыгранной*, либо *несыгранной*. Для турнира математических боёв руководитель собирается разбить детей на 4 команды по 6 человек. Может ли оказаться, что при любом разбиении школьников на 4 команды сыгранными оказываются либо ровно три команды, либо ровно одна, причём и тот, и другой варианты присутствуют? (*И. Богданов*)

Ответ. Да, может.

Решение. Приведём один из возможных примеров. Выделим трёх школьников. Будем называть сыгранными команды, в которых содержится 1 или 3 выделенных школьника, а остальные — несыгранными.

Выделенные школьники могут либо оказаться в трёх разных командах, и тогда мы получим три сыгранные команды и одну несыгранную, либо оказаться все в одной команде, и мы получим одну сыгранную и три несыгранные, либо двое могут оказаться в одной команде и один в другой, в этом случае мы также получаем одну сыгранную и три несыгранные команды. Таким образом, все условия соблюдаются.

Замечание. Также подходят все примеры, когда выделено нечётное количество школьников, большее 1 и меньшее 23, и все команды, в которых присутствует нечётное количество выделенных школьников, объявляются сыгранными, а все остальные — несыгранными.

10.8. Даны непостоянный многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами и натуральное число n. Положим $a_0 = n$, $a_k = P(a_{k-1})$ при всех натуральных k. Оказалось, что для любого натурального b в последовательности a_0, a_1, a_2, … есть число, являющееся b-й степенью натурального числа, большего 1. Докажите, что многочлен $P(x)$ — линейный. (*М. Антипов*)

Решение. Заметим сразу, что при каждом натуральном b в последовательности a_0, a_1, a_2, … встретится бесконечно много b-х степеней натуральных чисел, больших единицы. Действительно, если их количество конечно, и наибольшая из них — это $N = x^b$, то в последовательности не встретится ни одной Nb-й степени, что невозможно.

Положим $d_k = a_{k+1} - a_k$; тогда $a_{k+1} \equiv a_k \pmod{d_k}$. Поскольку все коэффициенты многочлена целые, из $a \equiv a' \pmod{d_k}$ следует $P(a) \equiv P(a') \pmod{d_k}$. Отсюда непосредственной индукцией по s получаем, что $a_{k+s+1} \equiv a_{k+s} \pmod{d_k}$, то есть $a_{k+s} \equiv a_k \pmod{d_k}$ при всех $s \geqslant 0$.

Лемма. *$a_k(a_k - 1)$ делится на d_k.*

Доказательство. Пусть p^ℓ — максимальная степень простого числа p, делящая d_k; достаточно показать, что $a_k(a_k - 1)$

делится на p^ℓ. Положим $b = p^{\ell-1}(p-1)\ell$; согласно замечанию выше, найдётся такой индекс $s > k$, что $a_s = m^b$ при натуральном m; при этом $a_s \equiv a_k \pmod{p^\ell}$.

Если m не делится на p, то по теореме Эйлера $a_s = \left(m^{p^{\ell-1}(p-1)}\right)^\ell \equiv 1^\ell \equiv 1 \pmod{p^\ell}$, откуда $a_k \equiv 1 \pmod{p^\ell}$. Если же m делится на p, то a_s делится на p^ℓ, а значит, и a_k тоже. В любом случае $a_k(a_k-1)$ делится на p^ℓ, что и требовалось. $\square$

Согласно лемме, для любого k число $a_k(a_k-1)$ делится на $d_k = P(a_k) - a_k$; при этом по условию среди целых чисел a_k бесконечно много различных. В частности, $|x(x-1)| \geqslant |Q(x)|$ при бесконечном количестве целых значений x (где $Q(x) = P(x) - x$).

Предположим теперь, что степень многочлена $P(x)$ (и, как следствие, многочлена $Q(x)$) больше 1. Тогда неравенство выше может выполняться для бесконечно многих целых x лишь тогда, когда $Q(x)$ — квадратный трёхчлен со старшим коэффициентом ± 1, то есть $Q(x) = \pm x^2 + ux + v$. В этом последнем случае значения многочлена $Q(x) \mp x(x-1) = (u \pm 1)x + v$ делятся на $Q(x)$ для бесконечного количества целых x; это может быть лишь если $Q(x) = \pm x(x-1)$, то есть $P(x) = x^2$ или $P(x) = 2x - x^2 = 1 - (x-1)^2$.

В первом случае $a_k = n^{2^k}$, то есть a_k не может быть нечётной степенью натурального числа, если n не является таковой степенью. Во втором случае $P(x) \leqslant 1$ при всех x, то есть $P(x)$ не может быть степенью натурального числа, большего 1. В обоих случаях условие задачи не выполнено; значит, $P(x)$ линеен.

11 класс

11.5. Радиусы пяти концентрических окружностей ω_0, ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию со знаменателем q. При каком наибольшем q можно нарисовать незамкнутую ломаную $A_0A_1A_2A_3A_4$, состоящую из четырёх отрезков равной длины, в которой A_i лежит на ω_i при всех $i = 0, 1, 2, 3, 4$? (*И. Богданов*)

Ответ. При $q = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Решение. Можно считать, что $q \geqslant 1$. Пусть радиус ω_i равен $R_i = Rq^i$.

Выберем некоторое положительное ℓ и попытаемся построить требуемую ломаную с отрезками длины ℓ, стартуя с произвольной точки $A_0 \in \omega_0$. Пусть точка $A_i \in \omega_i$ уже построена. Расстояния от неё до точек окружности ω_{i+1} пробегают отрезок $[R_{i+1} - R_i, R_{i+1} + R_i]$, то есть $[Rq^i(q-1), Rq^i(q+1)]$. Точку A_{i+1} можно построить тогда и только тогда, когда ℓ принадлежит этому отрезку. Значит, ломаную удастся построить тогда и только тогда, когда $Rq^i(q-1) \leqslant \ell \leqslant Rq^i(q+1)$ при всех $i = 0, 1, 2, 3$.

Поскольку $q \geqslant 1$, эта система неравенств равносильна неравенствам $Rq^3(q-1) \leqslant \ell \leqslant R(q+1)$. Длина ℓ, удовлетворяющая им, существует тогда и только тогда, когда $q^3(q-1) \leqslant q+1$, то есть $q^4 - q^3 - q - 1 \leqslant 0$, или $(q^2 - q - 1)(q^2 + 1) \leqslant 0$. Наибольшее значение q, удовлетворяющее этому неравенству, есть $q = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

11.6. На стороне AC равнобедренного треугольника ABC с основанием BC взята точка D. На меньшей дуге CD окружности, описанной около треугольника BCD, выбрана точка K. Луч CK пересекает прямую, параллельную BC и проходящую через A, в точке T. Пусть M — середина отрезка DT. Докажите, что $\angle AKT = \angle CAM$. (*А. Кузнецов*)

Решение. Продлим отрезок AM на его длину за точку M, получим точку N такую, что $ADNT$ — параллелограмм. Поскольку $\angle ANT = \angle CAM$, для решения задачи достаточно показать, что $\angle AKT = \angle ANT$, или что точки A, T, N, K лежат на одной окружности (см. рис. 3).

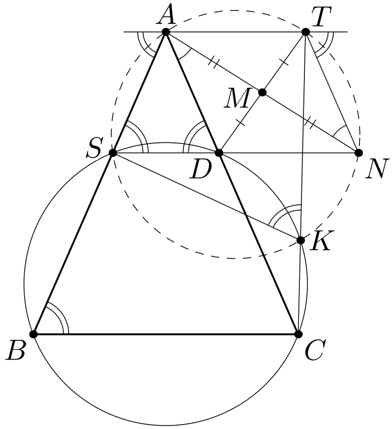

Рис. 3

Пусть ND пересекает AB в точке S; тогда $DS \parallel BC$, и $BSDC$ — равнобокая трапеция. Мы докажем, что точки K и N лежат на окружности ω, описанной около треугольника AST.

Имеем $\angle ATN = \angle ADN = 180^\circ - \angle SDA = 180^\circ - \angle ASD$, значит, N лежит на окружности ω. Из окружности, описанной около трапеции $BSDC$, имеем $\angle SKT = \angle SBC = 180^\circ - \angle SAT$, поэтому K лежит на окружности ω, что и требовалось доказать.

11.7. Даны непостоянный многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами и натуральное число n. Положим $a_0 = n$, $a_k = P(a_{k-1})$ при всех натуральных k. Оказалось, что для любого натурального b в последовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots$ есть число, являющееся b-й степенью натурального числа, большего 1. Докажите, что многочлен $P(x)$ — линейный. (*М. Антипов*)

Решение. Заметим сразу, что при каждом натуральном b в последовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots$ встретится бесконечно много b-х степеней натуральных чисел, больших единицы. Действительно, если их количество конечно, и наибольшая из них — это $N = x^b$, то в последовательности не встретится ни одной Nb-й степени, что невозможно.

Положим $d_k = a_{k+1} - a_k$; тогда $a_{k+1} \equiv a_k \pmod{d_k}$. Поскольку все коэффициенты многочлена целые, из $a \equiv$

$\equiv a' \pmod{d_k}$ следует $P(a) \equiv P(a') \pmod{d_k}$. Отсюда непосредственной индукцией по s получаем, что $a_{k+s+1} \equiv a_{k+s} \pmod{d_k}$, то есть $a_{k+s} \equiv a_k \pmod{d_k}$ при всех $s \geqslant 0$.

Лемма. *$a_k(a_k - 1)$ делится на d_k.*

Доказательство. Пусть p^ℓ — максимальная степень простого числа p, делящая d_k; достаточно показать, что $a_k(a_k-1)$ делится на p^ℓ. Положим $b = p^{\ell-1}(p-1)\ell$; согласно замечанию выше, найдётся такой индекс $s > k$, что $a_s = m^b$ при натуральном m; при этом $a_s \equiv a_k \pmod{p^\ell}$.

Если m не делится на p, то по теореме Эйлера $a_s = \left(m^{p^{\ell-1}(p-1)}\right)^\ell \equiv 1^\ell \equiv 1 \pmod{p^\ell}$, откуда $a_k \equiv 1 \pmod{p^\ell}$. Если же m делится на p, то a_s делится на p^ℓ, а значит, и a_k тоже. В любом случае $a_k(a_k-1)$ делится на p^ℓ, что и требовалось. $\square$

Согласно лемме, для любого k число $a_k(a_k-1)$ делится на $d_k = P(a_k) - a_k$; при этом по условию среди целых чисел a_k бесконечно много различных. В частности, $|x(x-1)| \geqslant |Q(x)|$ при бесконечном количестве целых значений x (где $Q(x) = P(x) - x$).

Предположим теперь, что степень многочлена $P(x)$ (и, как следствие, многочлена $Q(x)$) больше 1. Тогда неравенство выше может выполняться для бесконечно многих целых x лишь тогда, когда $Q(x)$ — квадратный трёхчлен со старшим коэффициентом ± 1, то есть $Q(x) = \pm x^2 + ux + v$. В этом последнем случае значения многочлена $Q(x) \mp x(x-1) = (u \pm 1)x + v$ делятся на $Q(x)$ для бесконечного количества целых x; это может быть лишь если $Q(x) = \pm x(x-1)$, то есть $P(x) = x^2$ или $P(x) = 2x - x^2 = 1 - (x-1)^2$.

В первом случае $a_k = n^{2^k}$, то есть a_k не может быть нечётной степенью натурального числа, если n не является таковой степенью. Во втором случае $P(x) \leqslant 1$ при всех x, то есть $P(x)$ не может быть степенью натурального числа, большего 1. В обоих случаях условие задачи не выполнено; значит, $P(x)$ линеен.

11.8. Дано натуральное n. Из 26 единичных белых кубиков и одного чёрного кубика собирается куб $3 \times 3 \times 3$ так, что чёрный кубик находится в его центре. Из n^3 таких кубов с ребром 3 составили куб с ребром $3n$. Какое наименьшее количество белых кубиков можно перекрасить в красный цвет так, чтобы каждый белый кубик имел хотя бы одну общую вершину с каким-нибудь красным? (*И. Богданов*)

Ответ. $(n+1)n^2$.

Решение. Введём систему координат так, чтобы центры кубиков имели координаты от 1 до $3n$ по каждой оси. Каждому кубику присвоим координаты его центра. Таким образом, кубик чёрный тогда и только тогда, когда все его координаты дают остаток 2 при делении на 3.

Окрасим красным все белые кубики с координатами (a, b, c), где a делится на 3, а $b \equiv c \equiv 2 \pmod 3$, а также все кубики с координатами $(1, b, c)$, где $b \equiv c \equiv 2 \pmod 3$. Нетрудно видеть, что получилось $(n+1)n^2$ красных кубиков, и требования задачи выполнены. Осталось показать, что добиться требуемого нельзя, окрасив менее $(n+1)n^2$ кубиков.

При $i = 1, 2, \ldots, n$ положим $w_{3i} = i$, $w_{3i-1} = 0$, $w_{3i-2} = n + 1 - i$; последовательность (w_i) выглядит так: $n, 0, 1, n-1, 0, 2, n-2, \ldots, 1, 0, n$. Запишем в каждый кубик с координатами (a, b, c) число $w_a w_b w_c$ (в частности, в чёрных кубиках записаны нули). Тогда общая сумма всех чисел, записанных в белых кубиках, окажется равной $\Sigma = (w_1 + \ldots + w_{3n})^3 = n^3(n+1)^3$.

Назовём *ценой* $S(X)$ кубика X сумму чисел во всех кубиках, имеющих с ним общую вершину (включая сам X). Тогда в любой окраске, удовлетворяющей требованиям, сумма цен красных кубиков не меньше, чем Σ. Докажем теперь, что $S(X) \leqslant (n+1)^2 n$ для любого белого кубика X. Из этого будет следовать, что в красный цвет надо окрасить не менее, чем $\dfrac{\Sigma}{(n+1)^2 n} = (n+1)n^2$ кубиков, что и требовалось.

Пусть (a, b, c) — координаты кубика X. Абсциссы всех кубиков, имеющих с ним общую вершину, равны a или $a \pm 1$; такое же утверждение верно для остальных координат. Поэтому $S(X) = (w_{a-1} + w_a + w_{a+1})(w_{b-1} + w_b + w_{b+1})(w_{c-1} + w_c + w_{c+1})$, где мы полагаем $w_0 = w_{3n+1} = 0$. Осталось заметить. что $w_{t-1} + w_t + w_{t+1} = n$, если $t \not\equiv 2 \pmod 3$, иначе $w_{t-1} + w_t + w_{t+1} = n + 1$. Поскольку не все координаты X дают остаток 2, отсюда следует, что $S(X) \leqslant (n+1)^2 n$.