9 класс

Первый день

9.1. На плоскости отмечены 5 точек. Докажите, что можно выбрать некоторые из них и переместить их так, чтобы расстояние между любыми двумя перемещёнными точками не изменилось, а в результате на плоскости осталось множество из 5 точек, симметричное относительно некоторой прямой.

9.2. При каком наименьшем натуральном n существуют такие целые $a_1, a_2, \ldots, a_n$, что квадратный трёхчлен

$$x^2 - 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 x + \left(a_1^4 + a_2^4 + \ldots + a_n^4 + 1\right)$$

имеет по крайней мере один целый корень?

9.3. Окружность Ω с центром в точке O описана около остроугольного треугольника ABC, в котором $AB < BC$; его высоты пересекаются в точке H. На продолжении отрезка BO за точку O отмечена точка D такая, что $\angle ADC = \angle ABC$. Прямая, проходящая через точку H параллельно прямой BO, пересекает меньшую дугу AC окружности Ω в точке E. Докажите, что $BH = DE$.

9.4. В лагерь приехали 10000 детей, каждый дружит ровно с 11 другими детьми в лагере (дружба взаимна). Каждый ребёнок носит футболку одного из семи цветов радуги, причём у любых двух друзей цвета различны. Вожатые потребовали, чтобы какие-нибудь дети (хотя бы один) надели футболки других цветов (из тех же семи). Опрос показал, что 100 детей менять цвет не намерены. Докажите, что некоторые из остальных детей всё же могут изменить цвета своих футболок так, чтобы по-прежнему у любых двух друзей цвета были различны.

XLV Всероссийская математическая олимпиада школьников

9 класс

Первый день

9.1. На плоскости отмечены 5 точек. Докажите, что можно выбрать некоторые из них и переместить их так, чтобы расстояние между любыми двумя перемещёнными точками не изменилось, а в результате на плоскости осталось множество из 5 точек, симметричное относительно некоторой прямой.

9.2. При каком наименьшем натуральном n существуют такие целые $a_1, a_2, \ldots, a_n$, что квадратный трёхчлен

$$x^2 - 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 x + \left(a_1^4 + a_2^4 + \ldots + a_n^4 + 1\right)$$

имеет по крайней мере один целый корень?

9.3. Окружность Ω с центром в точке O описана около остроугольного треугольника ABC, в котором $AB < BC$; его высоты пересекаются в точке H. На продолжении отрезка BO за точку O отмечена точка D такая, что $\angle ADC = \angle ABC$. Прямая, проходящая через точку H параллельно прямой BO, пересекает меньшую дугу AC окружности Ω в точке E. Докажите, что $BH = DE$.

9.4. В лагерь приехали 10000 детей, каждый дружит ровно с 11 другими детьми в лагере (дружба взаимна). Каждый ребёнок носит футболку одного из семи цветов радуги, причём у любых двух друзей цвета различны. Вожатые потребовали, чтобы какие-нибудь дети (хотя бы один) надели футболки других цветов (из тех же семи). Опрос показал, что 100 детей менять цвет не намерены. Докажите, что некоторые из остальных детей всё же могут изменить цвета своих футболок так, чтобы по-прежнему у любых двух друзей цвета были различны.

10 класс

Первый день

10.1. В каждой точке A плоскости стоит вещественное число $f(A)$. Известно, что если M — точка пересечения медиан треугольника ABC, то $f(M) = f(A) + f(B) + f(C)$. Докажите, что $f(A) = 0$ для всех точек A.

10.2. Паша и Вова играют в следующую игру, делая ходы по очереди. Начинает Паша. Изначально перед мальчиками лежит большой кусок пластилина. За один ход Паша может разрезать любой из имеющихся кусков пластилина на три части (не обязательно равные). Вова своим ходом выбирает два куска и слепляет их вместе. Паша побеждает, если в некоторый момент среди имеющихся кусков пластилина окажется 100 кусков одинаковой массы. Может ли Вова помешать Паше победить?

10.3. В межгалактической гостинице есть 100 комнат вместимостью 101, 102, …, 200 человек. В этих комнатах суммарно живёт n человек. В гостиницу приехал VIP-гость, для которого нужно освободить целую комнату. Для этого директор гостиницы выбирает одну комнату и переселяет всех её жителей в одну и ту же другую комнату. При каком наибольшем n директор гостиницы всегда может таким образом освободить комнату независимо от текущего расселения?

10.4. Дан остроугольный треугольник ABC, в котором $AC < BC$. Окружность проходит через точки A и B и пересекает отрезки CA и CB повторно в точках A_1 и B_1 соответственно. Описанные окружности треугольников ABC и A_1B_1C пересекаются повторно в точке P. Отрезки AB_1 и BA_1 пересекаются в точке S. Точки Q и R симметричны S относительно прямых CA и CB. Докажите, что точки P, Q, R и C лежат на одной окружности.

XLV Всероссийская математическая олимпиада школьников

10 класс

Первый день

10.1. В каждой точке A плоскости стоит вещественное число $f(A)$. Известно, что если M — точка пересечения медиан треугольника ABC, то $f(M) = f(A) + f(B) + f(C)$. Докажите, что $f(A) = 0$ для всех точек A.

10.2. Паша и Вова играют в следующую игру, делая ходы по очереди. Начинает Паша. Изначально перед мальчиками лежит большой кусок пластилина. За один ход Паша может разрезать любой из имеющихся кусков пластилина на три части (не обязательно равные). Вова своим ходом выбирает два куска и слепляет их вместе. Паша побеждает, если в некоторый момент среди имеющихся кусков пластилина окажется 100 кусков одинаковой массы. Может ли Вова помешать Паше победить?

10.3. В межгалактической гостинице есть 100 комнат вместимостью 101, 102, …, 200 человек. В этих комнатах суммарно живёт n человек. В гостиницу приехал VIP-гость, для которого нужно освободить целую комнату. Для этого директор гостиницы выбирает одну комнату и переселяет всех её жителей в одну и ту же другую комнату. При каком наибольшем n директор гостиницы всегда может таким образом освободить комнату независимо от текущего расселения?

10.4. Дан остроугольный треугольник ABC, в котором $AC < BC$. Окружность проходит через точки A и B и пересекает отрезки CA и CB повторно в точках A_1 и B_1 соответственно. Описанные окружности треугольников ABC и A_1B_1C пересекаются повторно в точке P. Отрезки AB_1 и BA_1 пересекаются в точке S. Точки Q и R симметричны S относительно прямых CA и CB. Докажите, что точки P, Q, R и C лежат на одной окружности.

11 класс

Первый день

11.1. В каждой точке A плоскости стоит вещественное число $f(A)$. Известно, что если M — точка пересечения медиан треугольника ABC, то $f(M) = f(A) + f(B) + f(C)$. Докажите, что $f(A) = 0$ для всех точек A.

11.2. Верно ли, что при любых ненулевых целых числах a и b система

$$\begin{cases}\operatorname{tg}(13x)\operatorname{tg}(ay)=1,\\ \operatorname{tg}(21x)\operatorname{tg}(by)=1\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

11.3. Даны n монет попарно различных масс и n чашечных весов, $n > 2$. При каждом взвешивании разрешается выбрать какие-то одни весы, положить на их чаши по одной монете, посмотреть на показания весов и затем снять монеты обратно. Какие-то одни из весов (неизвестно, какие) испорчены и могут выдавать случайным образом как правильный, так и неправильный результат. За какое наименьшее количество взвешиваний можно заведомо найти самую тяжёлую монету?

11.4. Дана треугольная пирамида $ABCD$. Сфера ω_A касается грани BCD, а также плоскостей остальных граней вне самих граней. Аналогично, сфера ω_B касается грани ACD, а также плоскостей остальных граней вне самих граней. Пусть K — точка касания сферы ω_A с плоскостью ACD, а L — точка касания сферы ω_B с плоскостью BCD. На продолжениях отрезков AK и BL за точки K и L выбраны точки X и Y соответственно так, что $\angle CKD = \angle CXD + \angle CBD$ и $\angle CLD = \angle CYD + \angle CAD$. Докажите, что точки X и Y равноудалены от середины отрезка CD.

XLV Всероссийская математическая олимпиада школьников

11 класс

Первый день

11.1. В каждой точке A плоскости стоит вещественное число $f(A)$. Известно, что если M — точка пересечения медиан треугольника ABC, то $f(M) = f(A) + f(B) + f(C)$. Докажите, что $f(A) = 0$ для всех точек A.

11.2. Верно ли, что при любых ненулевых целых числах a и b система

$$\begin{cases}\operatorname{tg}(13x)\operatorname{tg}(ay)=1,\\ \operatorname{tg}(21x)\operatorname{tg}(by)=1\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

11.3. Даны n монет попарно различных масс и n чашечных весов, $n > 2$. При каждом взвешивании разрешается выбрать какие-то одни весы, положить на их чаши по одной монете, посмотреть на показания весов и затем снять монеты обратно. Какие-то одни из весов (неизвестно, какие) испорчены и могут выдавать случайным образом как правильный, так и неправильный результат. За какое наименьшее количество взвешиваний можно заведомо найти самую тяжёлую монету?

11.4. Дана треугольная пирамида $ABCD$. Сфера ω_A касается грани BCD, а также плоскостей остальных граней вне самих граней. Аналогично, сфера ω_B касается грани ACD, а также плоскостей остальных граней вне самих граней. Пусть K — точка касания сферы ω_A с плоскостью ACD, а L — точка касания сферы ω_B с плоскостью BCD. На продолжениях отрезков AK и BL за точки K и L выбраны точки X и Y соответственно так, что $\angle CKD = \angle CXD + \angle CBD$ и $\angle CLD = \angle CYD + \angle CAD$. Докажите, что точки X и Y равноудалены от середины отрезка CD.