Материалы для проведения регионального этапа

XLV ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2018–2019 учебный год

Второй день

1–2 февраля 2019 г.

Москва, 2018

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XLV Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, Е. В. Бакаев, И. И. Богданов, С. Г. Волчёнков, А. И. Голованов, М. А. Григорьев, О. Ю. Дмитриев, Л. А. Емельянов, П. А. Кожевников, С. О. Кудря, А. С. Кузнецов, О. С. Нечаева, О. К. Подлипский, И. С. Рубанов, А. Л. Сафиуллина, К. А. Сухов, Д. А. Терёшин, С. И. Токарев, И. И. Фролов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, О. И. Южаков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Рецензент: д.ф.-м.н. Р. Н. Карасёв.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2018–2019 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2018–2019 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **1 февраля 2019 г.** (I тур) и **2 февраля 2019 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 4 астрономических часа.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2018–2019 учебном году»** для часовых поясов.

Разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводятся не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Победители и призёры олимпиады определяются Порядком проведения Всероссийской олимпиады школьников и Требованиями к проведению регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2018–2019 учебном году.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Таким образом, проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках;

б) недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) черновики не проверяются.

В связи с необходимостью качественной оценки работ участников, на их проверку выделяется до 7 дней.

Для единообразия оценки работ участников олимпиады из разных регионов и с целью исключения при этом ошибок, Центральная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников регионального этапа. В то же время при проверке работ региональное жюри имеет право задавать вопросы по оценке отдельных работ участников членам ЦПМК. Свои вопросы председатели (или их заместители) региональных методических комиссий смогут присылать, начиная с 1 февраля 2019, по адресу `region.math@yandex.ru`.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице (отметим, что для исключения различий в оценке близких продвижений по задаче в работах разных участников, таблица упрощена по сравнению с приведённой в Требованиях по проведению регионального этапа).

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение. Имеются небольшие недочёты (не логические), в целом не влияющие на решение.
до 4	В задаче типа «Оценка+пример» доказана оценка.
до 3	В задаче типа «Оценка+пример» построен пример.
до 1	Рассмотрен важный случай при отсутствии решения.
0	Аналитическое (координатным или векторным методом) решение геометрической задачи, не доведённое до конца.
0	Решение отсутствует. Решение неверное, продвижения отсутствуют.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.6. Даны четыре последовательных натуральных числа, бóльших 100. Докажите, что из них можно выбрать три числа, сумма которых представляется в виде произведения трёх различных натуральных чисел, бóльших 1. (*Н. Агаханов*)

Решение. Пусть n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ — данные числа. Сумма трёх наименьших из них равна $3n+3 = 3(n+1)$, а сумма трёх самых больших чисел равна $3(n+2)$. Но хотя бы одно из чисел $n+1$ и $n+2$ — чётно, то есть равно произведению чисел 2 и k, где $k > 3$. Значит, данная сумма и представима в виде произведения трёх различных натуральных чисел: 2, 3 и k.

Комментарий. Участник собирается выбрать три последовательных числа (из данных четырёх) и замечает, что их сумма обязательно делится на 3 — 3 балла.

9.7. На прямоугольном столе лежат несколько картонных прямоугольников. Их стороны параллельны сторонам стола. Размеры прямоугольников могут различаться, они могут перекрываться, но никакие два прямоугольника не могут иметь 4 общих вершины. Может ли оказаться, что каждая точка, являющаяся вершиной прямоугольника, является вершиной ровно трёх прямоугольников? (*И. Богданов*)

Ответ. Да, может.

Решение. На рис. 1 показано, как можно положить три пары прямоугольников так, чтобы для каждой пары все точки A, B, C, D, E, F, G, H были вершинами ровно по разу. Одинаковыми точками отмечены вершины одного из прямоугольников пары.

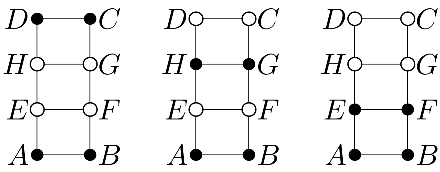

Рис. 1

Замечание. Существует много других примеров; один из них указан на рис. 2.

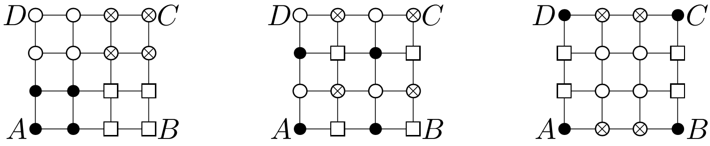

Рис. 2

Комментарий. Любой верный пример — 7 баллов.

9.8. Дан треугольник ABC. На внешней биссектрисе угла ABC отмечена точка D, лежащая внутри угла BAC, такая, что $\angle BCD = 60^\circ$. Известно, что $CD = 2AB$. Точка M — середина отрезка BD. Докажите, что треугольник AMC — равнобедренный. (*А. Кузнецов*)

Первое решение. Обозначим $\angle CBM = \alpha$. Поскольку BM — внешняя биссектриса угла ABC, то $\angle ABM = 180^\circ - \alpha$ и $\alpha < 90^\circ$ (см. рис. 3). Опустим из точки D перпендикуляр DH на прямую BC. Так как в треугольнике BCD углы при вершинах B и C острые, точка H лежит на отрезке BC. Поскольку DCH — прямоугольный треугольник с углом 60°, имеем $CH = \frac{CD}{2} = AB$.

Треугольник BHD — прямоугольный, HM — его медиана, проведённая к гипотенузе, поэтому $HM = \frac{BD}{2} = BM$. Следовательно, $\angle MHB = \angle HBM = \alpha$, откуда мы получаем, что $\angle MHC = 180^\circ - \alpha = \angle ABM$. Поскольку также $AB = CH$ и $BM = MH$, треугольники ABM и CHM равны. Таким образом, $AM = MC$, что и требовалось доказать.

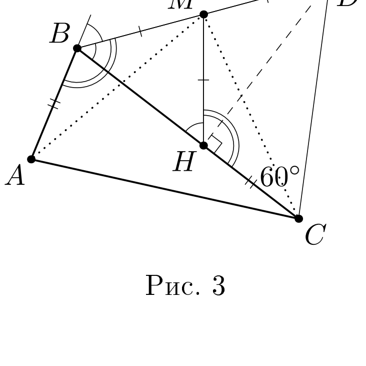

Рис. 3

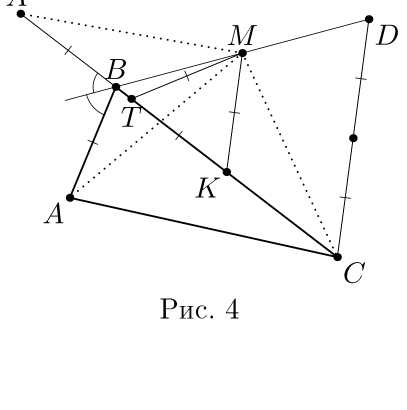

Рис. 4

Второе решение. Обозначим через A' точку, симметричную A относительно прямой BD (см. рис. 4). Поскольку BD — внешняя биссектриса угла ABC, точка A' лежит на продолжении отрезка CB за точку B. Пусть K — середина отрезка BC. Тогда MK — средняя линия треугольника BCD, поэтому $MK \parallel CD$ и $\angle MKB = \angle BCD = 60^\circ$, а также $MK = \frac{CD}{2} = AB = A'B$. На отрезке $A'K$ отметим точку T так, что $MK = KT$. Тогда из того, что $TK = MK = A'B$, следует $A'T = BK = KC$. Заметим, что треугольник MKT равносторонний, так как $MK = KT$ и $\angle MKT = 60^\circ$. Тогда $MT = MK$ и $\angle MTA' = 120^\circ = \angle MKC$, а, как было доказано ранее, $A'T = CK$. Значит, треугольники MKC и MTA' равны, поэтому $CM = A'M = AM$.

Замечание. Вместо того, чтобы отмечать точку T, можно записать теорему косинусов для треугольников $A'KM$ и MCK. В них углы при вершине K равны 60° и 120° соответственно. Пусть $MK = A'B = a$, $BK = KC = b$. Тогда

$$A'M = \sqrt{(a+b)^2 + a^2 - a(a+b)} = \sqrt{a^2 + ab + b^2} = CM.$$

Комментарий. Только за декларацию того, что нужно доказывать равенство $AM = MC$, баллы не добавляются.

Опущен перпендикуляр DH и замечено, что $CH = AB$ — 2 балла.

Замечено дополнительно, что $MH = MB$ (или $MH = MD$) — добавляется 1 балл.

Построена точка A', симметричная точке A относительно CD, и замечено, что достаточно доказать равенство $MA' = MC$ — 1 балл (не суммируется с предыдущими).

За отсутствие обоснования того, что точка H лежит на отрезке BC (а не на его продолжении), баллы не снимаются.

9.9. На доске нарисован выпуклый n-угольник ($n \geqslant 4$). Каждую его вершину надо окрасить либо в чёрный, либо в белый цвет. Назовём диагональ *разноцветной*, если её концы окрашены в разные цвета. Раскраску вершин назовём *хорошей*, если n-угольник можно разбить на треугольники разноцветными диагоналями, не имеющими общих точек (кроме вершин). Найдите количество хороших раскрасок. (*С. Берлов*)

Ответ. $n^2 - n$.

Решение. Сразу же заметим, что раскраска всех вершин в один цвет хорошей не является; такие раскраски в дальнейшем решении не рассматриваются.

Назовём сторону многоугольника *разноцветной*, если её концы окрашены в разные цвета (то есть расширим определение разноцветности на стороны). Назовём раскраску вершин *упорядоченной*, если все чёрные вершины на границе многоугольника идут подряд (иначе говоря, у многоугольника есть ровно две разноцветных стороны).

Лемма. *Раскраска вершин n-угольника (при $n \geqslant 3$) является хорошей тогда и только тогда, когда она упорядочена.*

Доказательство. Индукция по n. При $n = 3$ доказывать нечего (напомним, что мы не рассматриваем одноцветные раскраски). Докажем теперь переход индукции. Пусть утверждение доказано для всех m таких, что $3 \leqslant m < n$, где $n \geqslant 4$.

Предположим, что раскраска является хорошей. Разобьём многоугольник на треугольники непересекающимися разноцветными диагоналями; рассмотрим одну из этих диагоналей AB. Она делит n-угольник на два многоугольника P_1 и P_2 с меньшим количеством сторон, причём каждый из них раскрашен хорошо — а значит, по предположению индукции, и упорядоченно. Пусть A — чёрный конец диагонали, а B — белый. Все чёрные вершины в P_1 — это несколько последовательных вершин, начиная с A (но не включая B). Аналогично с чёрными вершинами в P_2. Но тогда эти два блока чёрных вершин в объединении дают один связный блок в исходном многоугольнике, то есть раскраска вершин n-угольника также является упорядоченной.

Пусть теперь раскраска является упорядоченной. Нетрудно видеть, что тогда в многоугольнике есть разноцветная диагональ. Она делит многоугольник на два меньших, при этом, очевидно, каждый из них также раскрашен упорядоченно. По предположению индукции, каждый из них раскрашен хорошо, а значит, и исходный n-угольник — тоже. $\square$

Ввиду леммы, осталось лишь посчитать число упорядоченных раскрасок n-угольника. Для каждого возможного количества чёрных вершин (от 1 до $n-1$) можно n способами выбрать расположение их блока среди всех n вершин, то есть число способов равно $n(n-1)$.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

В работе сформулирована лемма (из решения выше) — 1 балл.

Лемма полностью доказана — добавляются 4 балла.

Доказана только одна из двух половин утверждения леммы (т. е. либо то, что любая хорошая раскраска упорядочена, либо наоборот) — добавляются 2 балла вместо 4.

Произведён подсчёт количества упорядоченных раскрасок — добавляются 2 балла (эти баллы могут быть добавлены только при наличии *формулировки* леммы, с доказательством или без).

В этом подсчёте совершены мелкие ошибки (например, приводящие ко вдвое меньшему ответу) — добавляется 1 балл вместо 2.

При индукционном доказательстве леммы (сформулированной для всех $n \geqslant 4$) может возникнуть проблема, особенно при малых значениях n: разноцветная диагональ может отсекать треугольник, к которому предположение индукции неприменимо. Если такое встретилось в работе — снимается 1 балл.

9.10. Петя и Вася играют в следующую игру. Петя выбирает 100 (не обязательно различных) неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$, сумма которых равна 1. Вася разбивает их на 50 пар по своему усмотрению, считает произведение чисел в каждой паре и выписывает на доску наибольшее из 50 полученных произведений. Петя хочет, чтобы число на доске оказалось как можно больше, а Вася — чтобы оно было как можно меньше. Какое число окажется на доске при правильной игре? (*А. Храбров*)

Ответ. $\frac{1}{396}$.

Решение. Если Петя выберет числа $\frac{1}{2}, \frac{1}{198}, \frac{1}{198}, \ldots, \frac{1}{198}$, то, как бы ни разбивал эти числа Вася, в паре с числом $\frac{1}{2}$ будет число $\frac{1}{198}$. Их произведение будет равно $\frac{1}{396}$, а остальные будут не больше него. Тогда на доске окажется число $\frac{1}{396}$.

Покажем, как Васе для любых Петиных чисел получить на доске число, не большее $\frac{1}{396}$. Перенумеруем числа в порядке невозрастания: $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_{100}$. Разобьём числа на пары следующим образом: x_k в паре с x_{101-k}. Тогда произведениями чисел в парах будут

$$x_1x_{100},\ x_2x_{99},\ x_3x_{98},\ \ldots,\ x_kx_{101-k},\ \ldots,\ x_{50}x_{51}.$$

Покажем, что $a = x_kx_{101-k} \leqslant \frac{1}{396}$ при $k \leqslant 49$. Действительно, из неравенств $x_k \leqslant x_{k-1} \leqslant \ldots \leqslant x_1$ следует, что $kx_k \leqslant x_1 + x_2 + \ldots + x_k$, поэтому

$$ka = kx_k \cdot x_{101-k} \leqslant (x_1 + x_2 + \ldots + x_k)x_{101-k}.$$

Аналогично из неравенств $x_{101-k} \leqslant x_{100-k} \leqslant x_{99-k} \leqslant \ldots \leqslant x_{k+1}$ следует, что

$$(101 - 2k)x_{101-k} \leqslant x_{101-k} + x_{100-k} + \ldots + x_{k+1} \leqslant$$
$$\leqslant x_{k+1} + x_{k+2} + \ldots + x_{100} = 1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_k.$$

Поэтому

$$k(101-2k)a \leqslant (x_1+x_2+\ldots+x_k)(1-x_1-x_2-\ldots-x_k) = x(1-x),$$

где $x = x_1+x_2+\ldots+x_k$. Поскольку по неравенству о средних для двух чисел $x(1-x) \leqslant \left(\frac{x+(1-x)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, получаем неравенство $x_kx_{101-k} = a \leqslant \frac{1}{4k(101-2k)}$. Осталось доказать, что $k(101 - 2k) \geqslant 99$ при $k \leqslant 49$. Это неравенство можно переписать в виде $(k-1)(99-2k) \geqslant 0$, и обе скобки в последней формуле неотрицательны.

Осталось доказать, что $x_{50}x_{51} \leqslant \frac{1}{396}$. Поскольку $x_{50} \leqslant x_{49} \leqslant x_{48} \leqslant \ldots \leqslant x_2 \leqslant x_1$, имеем

$$x_{50} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{50}}{50} \leqslant \frac{1}{50}$$

и, аналогично,

$$x_{41} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{51}}{51} \leqslant \frac{1}{51}\,.$$

Следовательно, $x_{50}x_{51} \leqslant \frac{1}{50 \cdot 51} < \frac{1}{396}$.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Только пример Петиных чисел, при котором на доске окажется $\frac{1}{396}$ — 1 балл.

Только доказательство того, что Вася всегда может получить число, не меньшее $\frac{1}{396}$ — 5 баллов.

Только указание, что Васе нужно разбивать числа $x_1 \geqslant \geqslant \ldots \geqslant x_{101}$ на пары вида $x_k x_{101-k}$, баллов не добавляет.

Если в работе *доказано*, что при таком разбиении на доске получится не большее число, чем при любом другом — ставится 1 балл (этот балл может суммироваться с баллом за пример).

10 класс

10.6. Даны четыре последовательных натуральных числа, бóльших 100. Докажите, что из них можно выбрать три числа, сумма которых представляется в виде произведения трёх различных натуральных чисел, бóльших 1. (*Н. Агаханов*)

Решение. Пусть n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ — данные числа. Сумма трёх наименьших из них равна $3n+3=3(n+1)$, а сумма трёх самых больших чисел равна $3(n+2)$. Но хотя бы одно из чисел $n+1$ и $n+2$ — чётно, то есть равно произведению чисел 2 и k, где $k>3$. Значит, данная сумма и представима в виде произведения трёх различных натуральных чисел: 2, 3 и k.

Комментарий. Участник собирается выбрать три последовательных числа (из данных четырёх) и замечает, что их сумма обязательно делится на 3 — 3 балла.

10.7. Даны действительные числа a и b, причём $b>a>1$. Пусть

$$x_n = 2^n\left(\sqrt[2^n]{b}-\sqrt[2^n]{a}\right).$$

Докажите, что последовательность $x_1, x_2, \ldots$ убывает. (*А. Храбров*)

Решение. Докажем, что $x_n > x_{n+1}$. Положим $A=\sqrt[2^{n+1}]{a}$ и $B=\sqrt[2^{n+1}]{b}$. Легко видеть, что $B>A>1$, отсюда $\dfrac{A+B}{2}>1$. Тогда имеем

$$x_{n+1}=2^{n+1}(B-A)>0,$$

$$x_n=2^n(B^2-A^2)=2^{n+1}(B-A)\,\frac{A+B}{2}=x_{n+1}\cdot\frac{A+B}{2}>x_{n+1},$$

что и требовалось доказать.

Комментарий. Идея рассмотрения отношения двух соседних членов последовательности — 2 балла.

10.8. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH. Точки M и N — середины отрезков AH и CH соответственно. В окружности Ω, описанной около треугольника BMN, проведён диаметр BB'. Докажите, что $AB'=CB'$. (*А. Кузнецов*)

Решение. Пусть O — центр окружности Ω; иначе говоря, O — середина диаметра BB'. Обозначим через H' и P проекции точек B' и O соответственно на прямую AC (см. рис. 5). Так как O лежит на серединном перпендикуляре к MN, получаем, что P — середина MN. Поскольку O — середина BB', P является серединой HH'. Получаем, что H и H' симметричны относительно середины MN, откуда $HM = H'N$ и $H'M = HN$. Имеем $AH' = AM + H'M = HM + H'M = H'N + HN = H'N + CN = CH'$. Таким образом, $B'H'$ — серединный перпендикуляр к отрезку AC, следовательно, $AB' = CB'$, что и требовалось доказать.

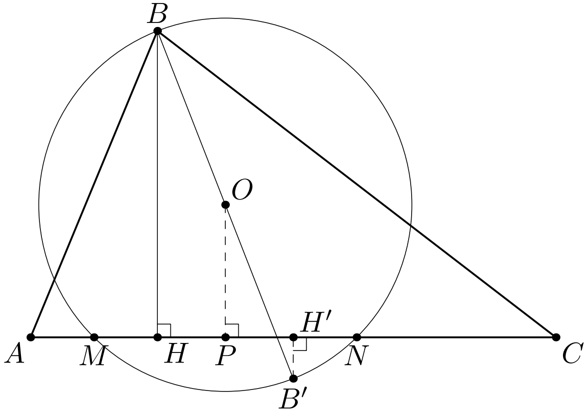

Рис. 5

Комментарий. Рассмотрена проекция H' точки B' на прямую AC и показано, что для решения задачи достаточно доказать, что H и H' симметричны относительно середины MN — 2 балла.

Если в условии не фигурирует середина отрезка MN, а лишь указано, что достаточно доказать равенство $HM = H'N$ или эквивалентное равенство — ставится 1 балл вместо 2.

10.9. На доске нарисован выпуклый n-угольник ($n \geqslant 4$). Каждую его вершину надо окрасить либо в чёрный, либо в белый цвет. Назовём диагональ *разноцветной*, если её концы окрашены в разные цвета. Раскраску вершин назовём *хорошей*, если n-угольник можно разбить на треугольники разноцветными диагоналями, не имеющими общих точек (кроме вершин). Найдите количество хороших раскрасок. (*С. Берлов*)

Ответ. $n^2 - n$.

Решение. Сразу же заметим, что раскраска всех вершин в один цвет хорошей не является; такие раскраски в дальнейшем решении не рассматриваются.

Назовём сторону многоугольника *разноцветной*, если её концы окрашены в разные цвета (то есть расширим определение разноцветности на стороны). Назовём раскраску вершин *упорядоченной*, если все чёрные вершины на границе многоугольника идут подряд (иначе говоря, у многоугольника есть ровно две разноцветных стороны).

Лемма. *Раскраска вершин n-угольника (при $n \geqslant 3$) является хорошей тогда и только тогда, когда она упорядочена.*

Доказательство. Индукция по n. При $n = 3$ доказывать нечего (напомним, что мы не рассматриваем одноцветные раскраски). Докажем теперь переход индукции. Пусть утверждение доказано для всех m таких, что $3 \leqslant m < n$, где $n \geqslant 4$.

Предположим, что раскраска является хорошей. Разобьём многоугольник на треугольники непересекающимися разноцветными диагоналями; рассмотрим одну из этих диагоналей AB. Она делит n-угольник на два многоугольника P_1 и P_2 с меньшим количеством сторон, причём каждый из них раскрашен хорошо — а значит, по предположению индукции, и упорядоченно. Пусть A — чёрный конец диагонали, а B — белый. Все чёрные вершины в P_1 — это несколько последовательных вершин, начиная с A (но не включая B). Аналогично с чёрными вершинами в P_2. Но тогда эти два блока чёрных вершин в объединении дают один связный блок в исходном многоугольнике, то есть раскраска вершин n-угольника также является упорядоченной.

Пусть теперь раскраска является упорядоченной. Нетрудно видеть, что тогда в многоугольнике есть разноцветная диагональ. Она делит многоугольник на два меньших, при этом, очевидно, каждый из них также раскрашен упорядоченно. По предположению индукции, каждый из них раскрашен хорошо, а значит, и исходный n-угольник — тоже. $\square$

Ввиду леммы, осталось лишь посчитать число упорядоченных раскрасок n-угольника. Для каждого возможного количества чёрных вершин (от 1 до $n-1$) можно n способами выбрать расположение их блока среди всех n вершин, то есть число способов равно $n(n-1)$.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

В работе сформулирована лемма (из решения выше) — 1 балл.

Лемма полностью доказана — добавляются 4 балла.

Доказана только одна из двух половин утверждения леммы (т. е. либо то, что любая хорошая раскраска упорядочена, либо наоборот) — добавляются 2 балла вместо 4.

Произведён подсчёт количества упорядоченных раскрасок — добавляются 2 балла (эти баллы могут быть добавлены только при наличии *формулировки* леммы, с доказательством или без).

В этом подсчёте совершены мелкие ошибки (например, приводящие ко вдвое меньшему ответу) — добавляется 1 балл вместо 2.

При индукционном доказательстве леммы (сформулированной для всех $n \geqslant 4$) может возникнуть проблема, особенно при малых значениях n: разноцветная диагональ может отсекать треугольник, к которому предположение индукции неприменимо. Если такое встретилось в работе — снимается 1 балл.

10.10. Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$ задана условиями $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{[\sqrt{n}]}$ при всех натуральных $n \geqslant 1$. Докажите, что для каждого натурального k в этой последовательности найдётся член, делящийся на k. (Как обычно, $[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x.)

(*А. С. Голованов*)

Решение. Среди чисел a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, $\ldots$ выберем число, которое даёт наименьший остаток при делении на k. Пусть это число a_m, и пусть оно даёт остаток r при делении на k. Если $r = 0$, то a_m — нужный нам член последовательности. Предположим теперь, что $0 < r < k$.

Поскольку $m \geqslant k$, имеем $m^2 + k \leqslant m^2 + m < m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2$, поэтому $[\sqrt{m^2+1}] = [\sqrt{m^2+2}] = \ldots = [\sqrt{m^2+k}] = m$. Отсюда $a_{m^2+1} = a_{m^2} + a_m$, $a_{m^2+2} = a_{m^2+1} + a_m$, $\ldots$, $a_{m^2+k} = a_{m^2+k-1} + a_m$, т. е. $a_{m^2+t} = a_{m^2} + ta_m$ для $t = 1, 2, \ldots, k$.

Пусть a_{m^2} даёт остаток R при делении на k, тогда a_{m^2+t} даёт при делении на k такой же остаток, как и число $R + tr$. В ряду чисел R, $R + r$, $R + 2r$, $\ldots$, $R + kr$ найдём первое число, не меньшее k (такое число найдётся, так как $R < k$, а $R+kr \geqslant R+k \geqslant k$). Пусть это число $R+sr$. Тогда $R+(s-1)r < k \leqslant R+sr$, откуда $0 \leqslant (R+sr)-k < r$, поэтому у числа $R+sr$, а значит, и у числа a_{m^2+s}, остаток при делении на k строго меньше r, что противоречит нашему выбору.

Замечание. Важный шаг в решении — обнаружение «длинной» арифметической прогрессии $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{n+k}$ с разностью a_m. При некоторых ограничивающих условиях, например, если k — простое число, или если a_m взаимно просто с k, решение задачи завершается уже на этом шаге (поскольку если a_m взаимно просто с k, то в этой прогрессии встретятся все остатки при делении на k). Трудная часть задачи — рассмотрение ситуации, когда все a_n (при достаточно больших n) не взаимно просты с k.

Комментарий. В последовательности обнаружена «длинная» арифметическая прогрессия $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{n+k}$ — 1 балл.

Из наличия «длинной» арифметической прогрессии выведено решение при существенных ограничивающих условиях — 1 балл (может суммироваться с предыдущим).

11 класс

11.6. Даны четыре последовательных натуральных числа, бо́льших 100. Докажите, что из них можно выбрать три числа, сумма которых представляется в виде произведения трёх различных натуральных чисел, бо́льших 1. (*Н. Агаханов*)

Решение. Пусть n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ — данные числа. Сумма трёх наименьших из них равна $3n+3=3(n+1)$, а сумма трёх самых больших чисел равна $3(n+2)$. Но хотя бы одно из чисел $n+1$ и $n+2$ — чётно, то есть равно произведению чисел 2 и k, где $k>3$. Значит, данная сумма и представима в виде произведения трёх различных натуральных чисел: 2, 3 и k.

Комментарий. Участник собирается выбрать три последовательных числа (из данных четырёх) и замечает, что их сумма обязательно делится на 3 — 3 балла.

11.7. Дано положительное число $a \neq 1$. Докажите, что последовательность $x_1, x_2, \ldots$, где $x_n = 2^n\left(\sqrt[2^n]{a}-1\right)$, убывает. (*А. Храбров*)

Решение. Пусть $t = \sqrt[2^{n+1}]{a}$. Заметим, что $t \neq 1$. Тогда $x_{n+1} = 2^{n+1}(t-1)$ и $x_n = 2^n(t^2-1)$. Следовательно,

$$x_n - x_{n+1} = 2^n(t^2-1) - 2^{n+1}(t-1) = \\ = 2^n(t^2-2t+1) = 2^n(t-1)^2 > 0,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. При других подходах к решению неравенства могут выглядеть по-разному при $a>1$ (когда члены последовательности положительны) и при $0<a<1$ (когда они отрицательны).

Комментарий. Идея рассмотрения отношения двух соседних членов последовательности — 2 балла.

Если решение проходит лишь в одном из случаев $a>1$ или $0<a<1$ — 4 балла.

11.8. На сторонах AB и AC треугольника ABC нашлись соответственно точки D и E такие, что $DB=BC=CE$. Отрезки BE и CD пересекаются в точке P. Докажите, что окружности, описанные около треугольников BDP и CEP, пересекаются в центре окружности, вписанной в треугольник ABC.

(*Р. Женодаров*)

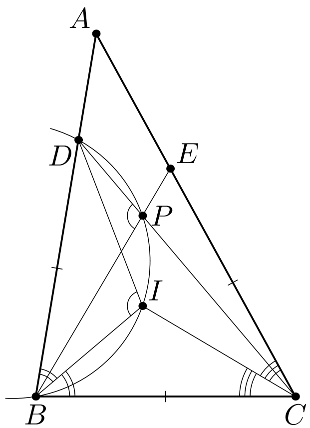

Рис. 6

Решение. Обозначим через I центр вписанной окружности треугольника ABC, точка I является точкой пересечения биссектрис. Докажем, что точки B, D, P, I лежат на одной окружности. Аналогично покажем, что точки C, E, P, I лежат на одной окружности, и задача будет решена.

Достаточно установить равенство $\angle BPD = \angle BID$. Биссектриса BI угла ABC является осью симметрии равнобедренного треугольника BDC, поэтому $\angle BID = \angle BIC = 180° - \angle IBC - \angle ICB = 180° - \frac{\angle B}{2} - \frac{\angle C}{2}$ (см. рис. 6). Далее, $\angle BPD = \angle PBC + \angle PCB = \angle EBC + \angle DCB$. Из равнобедренности треугольника BCE получаем $\angle EBC = \frac{180° - \angle C}{2} = 90° - \frac{\angle C}{2}$ и, аналогично, $\angle DCB = 90° - \frac{\angle B}{2}$. Отсюда $\angle BPD = 180° - \frac{\angle B}{2} - \frac{\angle C}{2} = \angle BID$, что и требовалось доказать.

Замечание. Точка I является так называемой *точкой Микеля* для четвёрки прямых AB, AC, BE, CD, т. е. через I проходят окружности, описанные около каждого из треугольников, образованных тремя из четырёх перечисленных прямых.

Комментарий. Угол между прямыми BE и CD выражен через углы треугольника ABC — 1 балл.

Угол между прямыми IB и ID (либо между прямыми IB и IE, либо между прямыми IC и IE или аналогичный угол) выражен через углы треугольника ABC — 3 балла.

11.9. В классе m учеников. В течение сентября каждый из них несколько раз ходил в бассейн; никто не ходил дважды в один день. Первого октября выяснилось, что все количества посещений бассейна у учеников различны. Более того, для любых двух из них обязательно был день, когда первый из них был в бассейне, а второй — нет, и день, когда, наоборот, второй из них был в бассейне, а первый — нет. Найдите наибольшее возможное значение m. (В сентябре 30 дней.) (*Д. Храмцов*)

Ответ. $m = 28$.

Решение. Для каждого натурального n обозначим $X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Каждому ученику сопоставим множество всех дней, когда он ходил в бассейн (это будет подмножество в X_{30}). Итого, мы получили набор из m (согласно условию, непустых) подмножеств в X_{30}. Условие равносильно тому, что во всех подмножествах разные количества элементов, и ни одно из них не содержится в другом; назовём такой набор подмножеств *хорошим*. Таким образом, нам нужно найти максимальное число множеств в хорошем семействе подмножеств в X_{30}.

Докажем сначала, что такой набор не может содержать больше 28 множеств. Это очевидно, если в наборе есть 30-элементное подмножество, так как оно содержит любое другое. Значит, можно считать, что множества в наборе могут состоять лишь из 1, 2, …, 29 элементов (и их не больше 29). Пусть в хорошем наборе есть 29-элементное множество A и 1-элементное множество B. Так как B не содержится в A, они не пересекаются. Тогда любое другое подмножество в X_{30} либо содержит B, либо содержится в A. Значит, в этом случае хороший набор состоит лишь из двух подмножеств. Наконец, если в наборе нет 1- или 29-элементного подмножества, то в нём уже не более 28 множеств, что и требовалось.

Осталось предъявить пример хорошего набора из 28 пожмножеств в X_{30}. Для этого покажем индукцией по $k \geqslant 2$, что существует хороший набор $A_1, A_2, \ldots, A_{2k-2}$ подмножеств в X_{2k}, причём A_i содержит $i+1$ элемент. В базовом случае $k = 2$ годятся подмножества $A_1 = \{1, 2\}$ и $A_2 = \{1, 3, 4\}$.

Пусть для некоторого k уже построен требуемый хороший набор $B_1, \ldots, B_{2k-2}$ подмножеств в X_{2k}. Тогда требуемый хороший набор подмножеств в X_{2k+2} можно построить так. Положим $A_{i+1} = B_i \cup \{2k+2\}$ при $i = 1, 2, \ldots, 2k-2$; эти множества содержат 3, 4, …, $2k$ элементов соответственно. Наконец, положим $A_1 = \{2k+1, 2k+2\}$ и $A_{2k} = \{1, 2, \ldots, 2k+1\}$. Нетрудно проверить, что они образуют требуемый хороший набор. Тем самым переход индукции доказан.

Замечание. Рассуждения из второго абзаца решения показывают, что в хорошем наборе подмножеств в X_n не больше, чем $n-2$ множества, если $n \geqslant 4$. С другой стороны, действуя аналогично второй половине решения, можно построить и хороший набор из $2k-1$ подмножества в X_{2k+1} при $k \geqslant 1$; базу индукции доставляет подмножество $A_1 = \{1, 2\}$.

Можно устроить и непосредственный переход индукции, позволяющий по хорошему набору из $n-2$ подмножеств в X_n построить хороший набор из $n-1$ подмножества в X_{n+1} (при $n \geqslant 5$). Для такого перехода полезно следующее соображение: если взять *дополнения* всех множеств хорошего набора, то также получится хороший набор.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Доказано, что число учеников в классе не превосходит 29 — 0 баллов.

Приведён пример с не более, чем 27 учениками — 0 баллов.

Доказано только, что число учеников в классе не превосходит 28 — 2 балла.

Только приведён пример с 28 учениками — 4 балла.

11.10. Дано натуральное число $n \geqslant 2$. Петя и Вася играют в следующую игру. Петя выбирает $2n$ (не обязательно различных) неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$, сумма которых равна 1. Вася расставляет эти числа по кругу в некотором порядке по своему усмотрению. После этого он вычисляет произведения пар соседних чисел и выписывает на доску наибольшее из всех $2n$ полученных произведений. Петя хочет, чтобы число на доске оказалось как можно больше, а Вася — чтобы оно было как можно меньше. Какое число окажется на доске при правильной игре?

(*А. Храбров*)

Ответ. $\frac{1}{8(n-1)}$.

Решение. Если Петя выберет числа $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4(n-1)}, \frac{1}{4(n-1)}, \ldots, \frac{1}{4(n-1)}$, то, как бы ни расставлял эти числа Вася, число $\frac{1}{2}$ будет в одной паре с числом $\frac{1}{4(n-1)}$. Значит, одно из произведений будет равно $\frac{1}{8(n-1)}$, а остальные будут не больше него. Тогда на доске окажется число $\frac{1}{8(n-1)}$.

Покажем, как Вася может для любых чисел получить на доске число, не большее $\dfrac{1}{8(n-1)}$. Перенумеруем числа в порядке убывания: $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_{2n}$. Поставим в какое-то место на круге число x_1, от него по часовой стрелке через пустые места числа $x_2, x_3, \ldots, x_n$. Теперь поставим число x_{2n} между x_1 и x_n; дальше по часовой стрелке от x_{2n} расставим на пустых местах по очереди числа $x_{2n-1}, x_{2n-2}, \ldots, x_{n+1}$. Тогда произведениями пар соседних чисел будут: $x_n x_{2n}$,

$$x_1x_{2n},\ x_2x_{2n-1},\ x_3x_{2n-2},\ \ldots,\ x_kx_{2n-k+1},\ \ldots,\ x_nx_{n+1}$$

и

$$x_1x_{2n-1},\ x_2x_{2n-2},\ x_3x_{2n-3},\ \ldots,\ x_kx_{2n-k},\ \ldots,\ x_{n-1}x_{n+1}.$$

Поскольку $x_kx_{2n-k+1} \leqslant x_kx_{2n-k}$, наибольшее произведение может быть лишь во второй строке.

Покажем, что $a = x_kx_{2n-k} \leqslant \dfrac{1}{8(n-1)}$ при $k \leqslant n-1$. Действительно, из неравенств $x_k \leqslant x_{k-1} \leqslant \ldots \leqslant x_1$ следует, что $kx_k \leqslant x_1 + x_2 + \ldots + x_k$, поэтому

$$ka = kx_k \cdot x_{2n-k} \leqslant (x_1 + x_2 + \ldots + x_k)\, x_{2n-k}.$$

Аналогично из неравенств

$$x_{2n-k} \leqslant x_{2n-k-1} \leqslant x_{2n-k-2} \leqslant \ldots \leqslant x_{k+1}$$

следует, что

$$(2n-2k)x_{2n-k} \leqslant x_{2n-k} + x_{2n-k-1} + \ldots + x_{k+1} \leqslant$$
$$\leqslant x_{k+1} + x_{k+2} + \ldots + x_{2n} = 1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_k.$$

Поэтому

$$2k(n-k)a \leqslant$$
$$\leqslant (x_1 + x_2 + \ldots + x_k)\,(1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_k) = x(1-x),$$

где $x = x_1+x_2+\ldots+x_k$. Поскольку по неравенству о средних для двух чисел $x(1-x) \leqslant \left(\dfrac{x+(1-x)}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$, получаем неравенство $x_kx_{n-2k} = a \leqslant \dfrac{1}{8k(n-k)}$. Осталось показать, что $k(n-k) \geqslant n-1$ при $k \leqslant n-1$. Но последнее неравенство можно переписать в виде $(k-1)(n-k-1) \geqslant 0$, а обе скобки в последней формуле неотрицательны.

Замечание. Оптимальная расстановка для Васи не единственна. Однако можно доказать, что при любом $k = 1, 2, \ldots, n-1$ в любой Васиной расстановке среди произведений пар соседних чисел найдётся число, не меньшее $x_k x_{100-k}$; поэтому оптимальными для Васи окажутся расстановки, в которых наибольшее произведение имеет такой вид.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Только пример Петиных чисел, при котором $A = \dfrac{1}{8(n-1)}$ — 1 балл.

Только доказательство того, что Вася всегда может получить число A, не меньшее $\dfrac{1}{8(n-1)}$ — 5 баллов.

Если в работе *доказано*, что в Васиной расстановке всегда найдётся число, не меньшее $x_k x_{100-k}$ при $k = 1, 2, \ldots, n-1$, — ставится 1 балл (этот балл может суммироваться с баллом за пример).