9 класс

Второй день

9.6. Даны четыре последовательных натуральных числа, бо́льших 100. Докажите, что из них можно выбрать три числа, сумма которых представляется в виде произведения трёх различных натуральных чисел, бо́льших 1.

9.7. На прямоугольном столе лежат несколько картонных прямоугольников. Их стороны параллельны сторонам стола. Размеры прямоугольников могут различаться, они могут перекрываться, но никакие два прямоугольника не могут иметь 4 общих вершины. Может ли оказаться, что каждая точка, являющаяся вершиной прямоугольника, является вершиной ровно трёх прямоугольников?

9.8. Дан треугольник ABC. На внешней биссектрисе угла ABC отмечена точка D, лежащая внутри угла BAC, такая, что $\angle BCD = 60^\circ$. Известно, что $CD = 2AB$. Точка M — середина отрезка BD. Докажите, что треугольник AMC — равнобедренный.

9.9. На доске нарисован выпуклый n-угольник ($n \geqslant 4$). Каждую его вершину надо окрасить либо в чёрный, либо в белый цвет. Назовём диагональ *разноцветной*, если её концы окрашены в разные цвета. Раскраску вершин назовём *хорошей*, если n-угольник можно разбить на треугольники разноцветными диагоналями, не имеющими общих точек (кроме вершин). Найдите количество хороших раскрасок.

9.10. Петя и Вася играют в следующую игру. Петя выбирает 100 (не обязательно различных) неотрицательных чисел x_1, x_2, ..., x_{100}, сумма которых равна 1. Вася разбивает их на 50 пар по своему усмотрению, считает произведение чисел в каждой паре и выписывает на доску наибольшее из 50 полученных произведений. Петя хочет, чтобы число на доске оказалось как можно больше, а Вася — чтобы оно было как можно меньше. Какое число окажется на доске при правильной игре?

XLV Всероссийская математическая олимпиада школьников

9 класс

Второй день

9.6. Даны четыре последовательных натуральных числа, бо́льших 100. Докажите, что из них можно выбрать три числа, сумма которых представляется в виде произведения трёх различных натуральных чисел, бо́льших 1.

9.7. На прямоугольном столе лежат несколько картонных прямоугольников. Их стороны параллельны сторонам стола. Размеры прямоугольников могут различаться, они могут перекрываться, но никакие два прямоугольника не могут иметь 4 общих вершины. Может ли оказаться, что каждая точка, являющаяся вершиной прямоугольника, является вершиной ровно трёх прямоугольников?

9.8. Дан треугольник ABC. На внешней биссектрисе угла ABC отмечена точка D, лежащая внутри угла BAC, такая, что $\angle BCD = 60^\circ$. Известно, что $CD = 2AB$. Точка M — середина отрезка BD. Докажите, что треугольник AMC — равнобедренный.

9.9. На доске нарисован выпуклый n-угольник ($n \geqslant 4$). Каждую его вершину надо окрасить либо в чёрный, либо в белый цвет. Назовём диагональ *разноцветной*, если её концы окрашены в разные цвета. Раскраску вершин назовём *хорошей*, если n-угольник можно разбить на треугольники разноцветными диагоналями, не имеющими общих точек (кроме вершин). Найдите количество хороших раскрасок.

9.10. Петя и Вася играют в следующую игру. Петя выбирает 100 (не обязательно различных) неотрицательных чисел x_1, x_2, ..., x_{100}, сумма которых равна 1. Вася разбивает их на 50 пар по своему усмотрению, считает произведение чисел в каждой паре и выписывает на доску наибольшее из 50 полученных произведений. Петя хочет, чтобы число на доске оказалось как можно больше, а Вася — чтобы оно было как можно меньше. Какое число окажется на доске при правильной игре?

10 класс

Второй день

10.6. Даны четыре последовательных натуральных числа, бо́льших 100. Докажите, что из них можно выбрать три числа, сумма которых представляется в виде произведения трёх различных натуральных чисел, бо́льших 1.

10.7. Даны действительные числа a и b, причём $b > a > 1$. Пусть
$$x_n = 2^n\left(\sqrt[2^n]{b} - \sqrt[2^n]{a}\right).$$
Докажите, что последовательность $x_1, x_2, \ldots$ убывает.

10.8. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH. Точки M и N — середины отрезков AH и CH соответственно. В окружности Ω, описанной около треугольника BMN, проведён диаметр BB'. Докажите, что $AB' = CB'$.

10.9. На доске нарисован выпуклый n-угольник ($n \geqslant 4$). Каждую его вершину надо окрасить либо в чёрный, либо в белый цвет. Назовём диагональ *разноцветной*, если её концы окрашены в разные цвета. Раскраску вершин назовём *хорошей*, если n-угольник можно разбить на треугольники разноцветными диагоналями, не имеющими общих точек (кроме вершин). Найдите количество хороших раскрасок.

10.10. Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$ задана условиями $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{[\sqrt{n}]}$ при всех натуральных $n \geqslant 1$. Докажите, что для каждого натурального k в этой последовательности найдётся член, делящийся на k. (Как обычно, $[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x.)

XLV Всероссийская математическая олимпиада школьников

10 класс

Второй день

10.6. Даны четыре последовательных натуральных числа, бо́льших 100. Докажите, что из них можно выбрать три числа, сумма которых представляется в виде произведения трёх различных натуральных чисел, бо́льших 1.

10.7. Даны действительные числа a и b, причём $b > a > 1$. Пусть
$$x_n = 2^n\left(\sqrt[2^n]{b} - \sqrt[2^n]{a}\right).$$
Докажите, что последовательность $x_1, x_2, \ldots$ убывает.

10.8. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH. Точки M и N — середины отрезков AH и CH соответственно. В окружности Ω, описанной около треугольника BMN, проведён диаметр BB'. Докажите, что $AB' = CB'$.

10.9. На доске нарисован выпуклый n-угольник ($n \geqslant 4$). Каждую его вершину надо окрасить либо в чёрный, либо в белый цвет. Назовём диагональ *разноцветной*, если её концы окрашены в разные цвета. Раскраску вершин назовём *хорошей*, если n-угольник можно разбить на треугольники разноцветными диагоналями, не имеющими общих точек (кроме вершин). Найдите количество хороших раскрасок.

10.10. Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$ задана условиями $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{[\sqrt{n}]}$ при всех натуральных $n \geqslant 1$. Докажите, что для каждого натурального k в этой последовательности найдётся член, делящийся на k. (Как обычно, $[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x.)

11 класс

Второй день

11.6. Даны четыре последовательных натуральных числа, бóльших 100. Докажите, что из них можно выбрать три числа, сумма которых представляется в виде произведения трёх различных натуральных чисел, бóльших 1.

11.7. Дано положительное число $a \neq 1$. Докажите, что последовательность $x_1, x_2, \ldots$, где $x_n = 2^n\left(\sqrt[2^n]{a} - 1\right)$, убывает.

11.8. На сторонах AB и AC треугольника ABC нашлись соответственно точки D и E такие, что $DB = BC = CE$. Отрезки BE и CD пересекаются в точке P. Докажите, что окружности, описанные около треугольников BDP и CEP, пересекаются в центре окружности, вписанной в треугольник ABC.

11.9. В классе m учеников. В течение сентября каждый из них несколько раз ходил в бассейн; никто не ходил дважды в один день. Первого октября выяснилось, что все количества посещений бассейна у учеников различны. Более того, для любых двух из них обязательно был день, когда первый из них был в бассейне, а второй — нет, и день, когда, наоборот, второй из них был в бассейне, а первый — нет. Найдите наибольшее возможное значение m. (В сентябре 30 дней.)

11.10. Дано натуральное число $n \geqslant 2$. Петя и Вася играют в следующую игру. Петя выбирает $2n$ (не обязательно различных) неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$, сумма которых равна 1. Вася расставляет эти числа по кругу в некотором порядке по своему усмотрению. После этого он вычисляет произведения пар соседних чисел и выписывает на доску наибольшее из всех $2n$ полученных произведений. Петя хочет, чтобы число на доске оказалось как можно больше, а Вася — чтобы оно было как можно меньше. Какое число окажется на доске при правильной игре?

XLV Всероссийская математическая олимпиада школьников

11 класс

Второй день

11.6. Даны четыре последовательных натуральных числа, бóльших 100. Докажите, что из них можно выбрать три числа, сумма которых представляется в виде произведения трёх различных натуральных чисел, бóльших 1.

11.7. Дано положительное число $a \neq 1$. Докажите, что последовательность $x_1, x_2, \ldots$, где $x_n = 2^n\left(\sqrt[2^n]{a} - 1\right)$, убывает.

11.8. На сторонах AB и AC треугольника ABC нашлись соответственно точки D и E такие, что $DB = BC = CE$. Отрезки BE и CD пересекаются в точке P. Докажите, что окружности, описанные около треугольников BDP и CEP, пересекаются в центре окружности, вписанной в треугольник ABC.

11.9. В классе m учеников. В течение сентября каждый из них несколько раз ходил в бассейн; никто не ходил дважды в один день. Первого октября выяснилось, что все количества посещений бассейна у учеников различны. Более того, для любых двух из них обязательно был день, когда первый из них был в бассейне, а второй — нет, и день, когда, наоборот, второй из них был в бассейне, а первый — нет. Найдите наибольшее возможное значение m. (В сентябре 30 дней.)

11.10. Дано натуральное число $n \geqslant 2$. Петя и Вася играют в следующую игру. Петя выбирает $2n$ (не обязательно различных) неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$, сумма которых равна 1. Вася расставляет эти числа по кругу в некотором порядке по своему усмотрению. После этого он вычисляет произведения пар соседних чисел и выписывает на доску наибольшее из всех $2n$ полученных произведений. Петя хочет, чтобы число на доске оказалось как можно больше, а Вася — чтобы оно было как можно меньше. Какое число окажется на доске при правильной игре?