Материалы для проведения заключительного этапа

XLIX ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2022–2023 учебный год

Первый день

Сириус,
21–27 апреля 2023 г.

Москва, 2023

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа XLIX Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, К. А. Кноп, П. А. Кожевников, А. С. Кузнецов, Ф. В. Петров, О. К. Подлипский, К. А. Сухов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов.

А также А. В. Антропов, Д. Ю. Бродский, Д. А. Демин, М. А. Дидин, И. А. Ефремов, П. Ю. Козлов, Т. С. Коротченко, Е. Г. Молчанов, А. В. Пастор, Д. А. Терешин, И. И. Фролов, М. А. Туревский, Г. Р. Челноков, О. И. Южаков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

Условия и решения задач

9 класс

9.1. Даны два приведённых квадратных трёхчлена $f(x)$ и $g(x)$; известно, что трёхчлены $f(x)$, $g(x)$ и $f(x)+g(x)$ имеют по два корня. Оказалось, что разность корней трёхчлена $f(x)$ равна разности корней трёхчлена $g(x)$. Докажите, что разность корней трёхчлена $f(x)+g(x)$ не больше этих разностей. (В каждой разности из большего корня вычитается меньший.) (*И. Богданов*)

Первое решение. Заметим, что разность корней приведённого квадратного трёхчлена $x^2 + bx + c$ равна корню из его дискриминанта, то есть $\sqrt{b^2 - 4c}$.

Пусть два данных трёхчлена — это $f(x) = x^2 + b_1x + c_1$ и $g(x) = x^2 + b_2x + c_2$. Согласно условию, у них общий дискриминант $D = b_1^2 - 4c_1 = b_2^2 - 4c_2$. Вместо суммы трёхчленов удобно рассмотреть их полусумму — она тоже является приведённым квадратным трёхчленом. Квадрат разности его корней (т.е. дискриминант) равен

$$\left(\frac{b_1 + b_2}{2}\right)^2 - 2(c_1 + c_2) = \frac{b_1^2 + b_2^2}{2} - 2(c_1 + c_2) - \left(\frac{b_1 - b_2}{2}\right)^2.$$

Значит, он не больше, чем $\frac{b_1^2 + b_2^2}{2} - 2(c_1 + c_2) = \frac{D}{2} + \frac{D}{2} = D$. Отсюда и следует, что разность корней полусуммы не больше, чем $\sqrt{D}$, то есть разность корней каждого из данных трёхчленов.

Замечание. В оценке выше можно было воспользоваться неравенством о средних $\sqrt{\frac{b_1^2 + b_2^2}{2}} \geqslant \frac{b_1 + b_2}{2}$.

Второе решение. Заметим, что любой приведённый квадратный трёхчлен с двумя корнями имеет вид $(x - p)^2 - q^2$ при $q \geqslant 0$. При этом разность его корней равна $2q$, а его наименьшее значение равно $-q^2$.

Теперь условие означает, что два данных трёхчлена имеют равные наименьшие значения $-q^2$. Наименьшее значение их полусуммы, очевидно, не меньше $-q^2$ (оно является полусуммой каких-то значений исходных трёхчленов), то есть оно равно $-r^2$

при $0 \leqslant r \leqslant q$. Поэтому и разность корней полусуммы, то есть $2r$, не превосходит $2q$.

Замечание. Практически такое же рассуждение показывает, что утверждение задачи остаётся верным, если вместо двух приведённых трёхчленов рассмотреть два произвольных квадратных трёхчлена с положительными старшими коэффициентами.

9.2. Изначально в строку выписывают 250 букв — 125 букв А и 125 букв Б в некотором порядке. Затем за одну операцию можно взять любой кусок из нескольких подряд стоящих букв, среди которых поровну букв А и Б, и переставить буквы в этом куске в обратном порядке, поменяв в этом куске все буквы А на буквы Б и буквы Б на буквы А. (Например, из строки А$\underbrace{\text{БАББАА}}$Б можно одной операцией получить строку А$\underbrace{\text{ББААБА}}$Б.) Можно ли выписать исходную строку и совершить несколько операций так, чтобы в результате на доске оказалась та же строка, буквы которой записаны в обратном порядке? (*С. Берлов*)

Ответ. Нельзя.

Первое решение. Пронумеруем позиции в строке слева направо числами от 1 до 250. Пусть в исходной строке x букв А стоят на нечётных местах (т. е. местах с нечётными номерами). Покажем, что в полученных строках это количество не изменится.

Действительно, пусть для некоторой операции выбран кусок, в котором по y букв А и Б, причём t из этих букв А стоят на нечётных местах. Тогда на чётных местах в куске стоят $y - t$ букв А и, следовательно, $y - (y - t) = t$ букв Б. После операции именно из этих t букв Б возникнут буквы А, стоящие на нечётных местах куска — значит, количество таких букв А не поменяется.

Итак, в любой полученной строке будет ровно x букв А на нечётных местах. Однако, если строка развернётся задом наперёд, то на нечётных местах должны оказаться ровно те буквы, которые раньше были на чётных местах, а там было ровно $125 - x$ букв А. Поскольку $125 - x \neq x$, требуемое невозможно.

Замечание. В решении выше предъявлен *инвариант* процесса (то есть величина, остающаяся постоянной) — количество букв А на нечётных местах. Существуют и другие похожие инварианты, позволяющие решить задачу. Например, можно показать, что сумма номеров мест, на которых стоят буквы А, является таким инвариантом.

Второе решение. Предъявим ещё один инвариант. В строке всего 125^2 пар, состоящих из буквы А и буквы Б. Назовём такую пару *левой*, если в ней А стоит левее Б, и *правой* иначе. Покажем, что при операции количество левых пар не изменяется. Из этого будет следовать невозможность требуемого, ибо при развороте строки все пары меняют тип, а значит, количество левых пар меняет чётность.

Рассмотрим одну операцию с куском длины $2y$. При этой операции пары из букв, не лежащих в куске, сохраняют свой тип. Далее, для каждой буквы вне куска было ровно y пар, содержащих её и букву из куска; столько же таких пар осталось, и все эти пары были и стали одного и того же типа.

Значит, осталось проследить за парами букв в самом куске. Но каждая пара сменила свой тип дважды: когда кусок развернулся и когда все буквы заменили на другие. Значит, количество левых пар в куске также не изменилось.

Замечание. Можно показать, что по количеству левых пар восстанавливается сумма номеров мест букв А (и наоборот). Таким образом, инвариант в этом решении — тот же, что и в предыдущем замечании.

9.3. Каждое натуральное число, большее 1000, окрасили либо в красный, либо в синий цвет. Оказалось, что произведение любых двух различных красных чисел — синее. Может ли случиться, что никакие два синих числа не отличаются на 1? (*С. Берлов*)

Ответ. Не может.

Первое решение. Предположим, что это возможно.

Лемма. *Пусть число n синее; тогда n^2 — красное.*

Доказательство. Поскольку n синее, числа $n-1$ и $n+1$ красные, иначе два синих числа отличаются на 1. Поэтому число $n^2-1=(n-1)(n+1)$ синее. Значит, n^2 красное. $\square$

Очевидно, что существует синее число $k > 1001$; по лемме число k^2 красное. Рассмотрим два случая.

Пусть число k^3 синее. Тогда по лемме число $k^6 = (k^3)^2$ красное. Поскольку $k^2 \cdot k^4 = k^6$, и числа k^2 и k^6 красные, то число k^4 обязано быть синим. По лемме число $k^8 = (k^4)^2$ красное, но оно является произведением красных чисел k^2 и k^6. Этого не может быть.

Пусть теперь число k^3 красное. Тогда число $k^5 = k^2 \cdot k^3$ синее, и по лемме число $k^{10} = (k^5)^2$ красное. Поскольку $k^{10} = k^2 \cdot k^8 = k^3 \cdot k^7$ и числа k^2 и k^3 красные, числа k^7 и k^8 должны быть синими, а тогда, по лемме, числа $k^{14} = (k^7)^2$ и $k^{16} = (k^8)^2$ красные. Но тогда красное число k^{16} равно произведению красных чисел k^2 и k^{14}. Противоречие.

Второе решение. Опять же предположим противное. Начнём со следующего замечания. Пусть a и b — два различных красных числа; тогда число $ab+1$ тоже красное. Действительно, по условию число ab синее, а тогда $ab + 1$ красное.

Цвета чисел не могут строго чередоваться — иначе все числа одной чётности будут красными, а тогда найдутся и два красных числа с красным произведением. Значит, есть два одноцветных числа, отличающихся на 1 — пусть это a и $a + 1$. Из условия их общий цвет — красный.

Из замечания выше получаем сначала, что число $b = a^2 + a + 1 = a(a + 1) + 1$ красное, а затем — что число $c = a^3 + a^2 + a + 1 = ab + 1$ тоже красное. Значит, по условию, число $d = a^4 + 2a^3 + 2a^2 + 2a + 1 = (a + 1)c$ синее.

С другой стороны, из того же замечания число $p = (a + 1)b + 1 = a^3 + 2a^2 + 2a + 2$ красное. Значит, по условию, число $ap = a^4 + 2a^3 + 2a^2 + 2a = d - 1$ тоже синее. Итак, мы нашли два соседних синих числа d и $d - 1$, что невозможно.

9.4. Точка X лежит строго внутри описанной около треугольника ABC окружности. Обозначим через I_B и I_C центры вневписанных окружностей этого треугольника, касающихся сторон AC и AB соответственно. Докажите, что $XI_B \cdot XI_C > XB \cdot XC$.

(*Д. Бродский*)

Решение. Обозначим через Γ окружность с диаметром I_BI_C. Поскольку $CI_C \perp CI_B$ и $BI_C \perp BI_B$, точки B и C лежат на Γ (см. рис. 1).

Обозначим через I центр вписанной окружности ABC. Если точка X лежит внутри угла BIC, то углы XBI_C и XCI_B тупые, поэтому $XI_B > XC$ и $XI_C > XB$. Перемножив эти неравенства, получим требуемое.

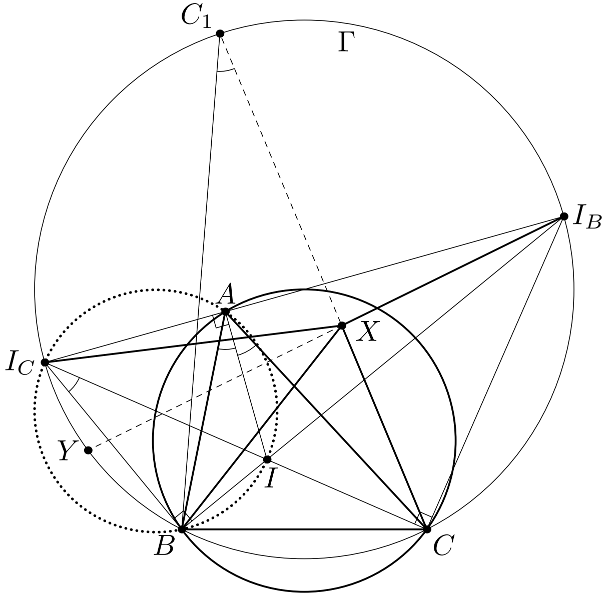

Рис. 1

В противном случае точки X и A лежат в одной полуплоскости относительно прямой BC. Продлим лучи CX и I_BX до пересечения с Γ в точках C_1 и Y соответственно. Поскольку четырёхугольник AI_CBI вписан в окружность с диаметром II_C, то $\angle XC_1B = \angle II_CB = \angle IAB = \frac{1}{2}\angle CAB < \frac{1}{2}\angle CXB = \frac{1}{2}(\angle XC_1B + \angle XBC_1)$, откуда $\angle XC_1B < \angle XBC_1$, поэтому $XC_1 > XB$. Кроме того, поскольку длина хорды окружности не превосходит длины диаметра, $I_BX + XI_C \geqslant I_BI_C \geqslant I_BY = I_BX + XY$, откуда $XI_C > XY$. Следовательно, $XI_B \cdot XI_C \geqslant XI_B \cdot XY = XC \cdot XC_1 > XC \cdot XB$.

Замечание. Если разрешить точке X находиться на описанной окружности треугольника ABC, то неравенство обращается в равенство в вершине A и в середине дуги CAB.

10 класс

10.1. Прямые, содержащие стороны данного остроугольного треугольника T, покрасили в красный, зелёный и синий цвета. Затем эти прямые повернули вокруг центра описанной окружности данного треугольника по часовой стрелке на угол 120° (прямая сохраняет свой цвет после поворота). Докажите, что три точки пересечения одноцветных прямых являются вершинами треугольника, равного T. (*Л. Емельянов*)

Решение. Пусть ABC — данный треугольник, O — центр его описанной окружности, D, E, F — середины его сторон BC, CA, AB соответственно, так что DEF подобен ABC с коэффициентом $1/2$ и $OD \perp BC$, $OE \perp CA$, $OF \perp AB$.

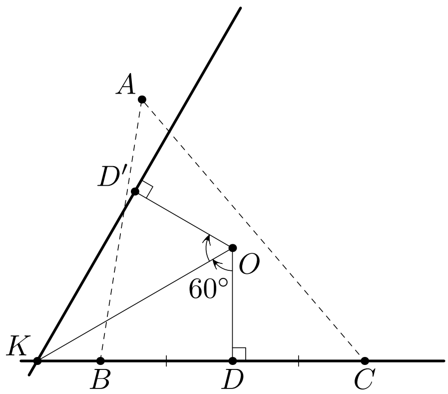

Рис. 2

Пусть при повороте вокруг O по часовой стрелке на угол 120° точка D переходит в D'. При таком повороте прямая BC переходит в перпендикуляр к OD', проходящий через D', пусть этот перпендикуляр пересекает BC в точке K (см. рис. 2). Видим, что прямоугольные треугольники ODK и $OD'K$ равны (симметричны относительно OK), и поэтому $\angle KOD = \angle DOD'/2 = 60^\circ$, значит, в прямоугольном треугольнике KOD верно $OK = 2OD$. Иными словами, K получается из D в результате поворотной гомотетии: поворота с центром O по часовой стрелке на угол 60° и последующей гомотетии с центром O и коэффициентом 2. Аналогичный результат получим для других точек L, M пересечения одноцветных прямых. Таким образом, треугольник KLM получается из DEF поворотной гомотетией с центром O и коэффициентом 2. Тогда KLM подобен DEF с коэффициентом 2, следовательно, равен ABC.

10.2. У 100 школьников есть стопка из 101 карточки, которые пронумерованы числами от 0 до 100. Первый школьник перемешивает стопку, затем берёт сверху из получившейся стопки по одной карточке, и при каждом взятии карточки (в том числе при первом) записывает на доску среднее арифметическое чисел на всех взятых им на данный момент карточках. Так он записывает 100 чисел, а когда в стопке остаётся одна карточка, он возвращает карточки в стопку, и далее всё то же самое, начиная с перемешивания стопки, проделывает второй школьник, потом третий, и т.д. Докажите, что среди выписанных на доске 10000 чисел найдутся два одинаковых. (*А. Грибалко*)

Решение. На 1-м шаге у каждого из 100 человек было выписано одно из чисел множества $A_1 = \{0, 1, 2, \ldots, 100\}$.

На 2-м шаге — одно из чисел множества $A_2 = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \ldots, \frac{199}{2}\right\}$.

На 100-м шаге выписано одно из чисел множества $A_{100} = \left\{\frac{S}{100}, \frac{S-1}{100}, \frac{S-2}{100}, \ldots, \frac{S-100}{100}\right\}$, где $S = \frac{100 \cdot 101}{2}$ — сумма всех чисел (а вычитается — число на оставшейся в конце карточке).

Видим, что $A_1 \cup A_2 = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \ldots, \frac{199}{2}, \frac{200}{2}\right\}$, так что $|A_1 \cup A_2| = 201$. Далее, $|A_{100}| = 101$, но числа $50 - \frac{1}{2}, 50, 50 + \frac{1}{2}$ принадлежат $A_2 \cap A_{100}$, значит, $|A_1 \cup A_2 \cup A_{100}| \leqslant 201 + 101 - 3 = 299$.

Итак, мы показали, что 300 чисел, выписанных на 1-м, 2-м и 100-м шагах, могут принимать не более 299 различных значений. Следовательно, какие-то два из них равны.

10.3. Даны натуральные числа a и b такие, что $a \geqslant 2b$. Существует ли многочлен $P(x)$ степени больше 0 с коэффициентами из множества $\{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$ такой, что $P(a)$ делится на $P(b)$?

(*Т. Коротченко*)

Ответ. Существует при $b > 1$.

Решение. Легко видеть, что если $b = 1$, то всякий многочлен с коэффициентами от 0 до $b - 1$ является нулевым.

Пусть $b > 1$. Представим $a - b$ в b-ичной записи: $a - b = c_n b^n + \ldots + c_1 b + c_0$, где $c_i \in \{0, 1, 2, \ldots, b - 1\}$. Поскольку $a - b \geqslant b$, в этой записи $n \geqslant 1$.

Покажем, что $P(x) = c_n x^n + \ldots + c_1 x + c_0$ удовлетворяет условию. Действительно, для любого многочлена f с целыми коэффициентами $f(a) - f(b)$ делится на $a - b$. Значит, $P(a) - P(b)$ делится на $a - b = P(b)$. Но тогда и $P(a) = (P(a) - P(b)) + P(b)$ делится на $P(b)$.

10.4. С одной стороны теннисного стола выстроилась очередь из n девочек, а с другой — из n мальчиков. И девочки, и мальчики пронумерованы числами от 1 до n в том порядке, как они стоят. Первую партию играют девочка и мальчик с номерами 1, а далее после каждой партии проигравший встаёт в конец своей очереди, а победивший играет со следующим. Через некоторое время оказалось, что каждая девочка сыграла ровно одну партию с каждым мальчиком. Докажите, что если n нечётно, то в последней партии играли девочка и мальчик с нечётными номерами. (*А. Грибалко*)

Решение. Будем изображать турнир в виде таблицы $n \times n$, в которой и столбцы, и строки пронумерованы числами от 1 до n. Столбцы будут соответствовать девочкам, а строки — мальчикам. Тогда каждая партия задаётся клеткой, координаты которой соответствуют номерам девочки и мальчика, играющих в этой партии. Поставим сначала фишку в клетку $(1, 1)$. После победы девочки фишка будет перемещаться вверх, а в случае победы мальчика — вправо. При этом если фишка доходит до края таблицы, то из последней строки при движении вверх она перемещается в первую строку, а из последнего столбца при движении вправо — в первый столбец. Тогда условие задачи равносильно тому, что фишка обошла все клетки таблицы, побывав в каждой ровно по одному разу.

Раскрасим клетки таблицы в n цветов по диагоналям, идущим вправо-вниз: первую диагональ — в первый цвет, вторую — во второй, …, n-ю диагональ — в n-й цвет, а следующие диагонали — снова в цвета с первого по $(n-1)$-й. Заметим, что после каждой партии номер цвета клетки, в которой находится фишка, увеличивается на 1 по модулю n. Так как всего в турнире было проведено n^2 партий, что кратно n, то в конце фишка находится в клетке n-го цвета, то есть на главной диагонали (далее, говоря «диагональ», мы будем иметь в виду именно эту диагональ). Пусть финальная клетка в маршруте фишки расположена в столбце с номером m, тогда требуется доказать, что число m нечётно.

Из верхней клетки диагонали фишка не могла пойти вверх, так как уже была в клетке $(1,1)$. Значит, если эта клетка не финальная, то из неё фишка пошла вправо. Тогда и из следующей клетки диагонали она сделала ход вправо, и т.д. до клетки, расположенной в столбце с номером $m-1$. Аналогично из клеток диагонали, находящихся в столбцах с номерами от $m+1$ до n, фишка ходила вверх (см. рис. 3). Пусть первая клетка диагонали, в которую попала фишка, находится в столбце с номером k. Рассмотрим путь фишки от начальной клетки до неё. Все пути от клеток первого цвета до следующей клетки n-го цвета должны быть такими же, как и рассматриваемый путь, а именно, каждый такой путь получается из другого смещением на вектор $(1,-1)$. Действительно, если бы фишка из клетки $(a-1,b)$ сделала ход вверх, а из клетки $(a,b-1)$ — вправо, то в клетку (a,b) она бы не попала, а если из этих клеток она делала ходы вправо и вверх соответственно, то попала бы в одну клетку дважды; поэтому из каждых двух таких клеток фишка делала одинаковые ходы.

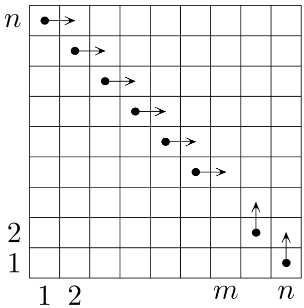

Рис. 3

Без ограничения общности будем считать, что $k<m$. Клетки диагонали, находящиеся левее финальной клетки, будем называть *левыми*, а находящиеся правее — *правыми*. Пронумеруем левые клетки числами от 1 до $m-1$, а правые — от 1 до $n-m$ (и те, и другие нумеруем, двигаясь вправо-вниз). Посмотрим, в каком порядке фишка обходила эти клетки. С левых клеток она

смещалась на k клеток вправо (поскольку с них в клетку первого цвета она делала ход вправо), а с правых клеток — на $k-1$ клетку вправо. Значит, для левых клеток нам важен лишь остаток от деления номера на k, а для правых — от деления на $k-1$. При этом, если правых клеток меньше k, то можно увеличить n на $2(k-1)$, добавив $2(k-1)$ правых клеток; это не повлияет на дальнейшие рассуждения. Для удобства заменим все номера клеток на соответствующие остатки, причём для правых клеток вместо остатка 0 будем использовать число $k-1$.

Пусть число m при делении на k даёт остаток d. Тогда первый переход с левых клеток на правые был с числа 0 на число $k-d$, и в этот момент все клетки с нулём в левой части были посещены. На диагонали остались только числа от 1 до $k-1$. Дальше цепочка переходов между правыми и левыми клетками выглядит так: $k-d \to \cdots \to d$. В этой цепочке каждое число от 1 до $k-1$ встречается два раза, начинается она на правых клетках, а заканчивается на левых. Переходы с правых клеток на левые будем называть переходами *первого типа*, а с левых на правые — *второго*. Тогда в цепочке $k-1$ переход первого типа и $k-2$ перехода второго, и они чередуются.

Докажем, что каждые два числа в цепочке, симметричные относительно её центра, дают в сумме k. Для крайних чисел это верно. Каждые два симметричных перехода имеют один тип, поэтому в них по модулю $k-1$ (для переходов первого типа) или по модулю k (для переходов второго типа) прибавляется одно и то же число. Значит, сумма следующих двух симметричных чисел (которые ближе к центру цепочки) снова равна либо 1 по модулю $k-1$, либо 0 по модулю k. Но сумма самих чисел не меньше 2 и не больше $2k-2$, поэтому она может быть равна только k.

Предположим, что число m чётно, и рассмотрим два случая.

1) Число k нечётно. Тогда центральный переход в цепочке имеет второй тип. У правой нижней клетки диагонали нечётный номер, поскольку число $n-m$ нечётно, а $k-1$ чётно. Левая верхняя клетка диагонали тоже имеет нечётный номер, поэтому при переходе первого типа чётность числа меняется. Пусть с числа 1 переход первого типа происходит на число $2s$. Тогда по модулю

$k-1$ переходы первого типа выглядят так: $1 \to 2s$, $2 \to 2s+1$, $\ldots, k-1 \to 2s+k-2$. Суммы чисел в этих парах являются последовательными нечётными числами, поэтому при делении на $k-1$ они дают все нечётные остатки по два раза. В частности, есть переход, в котором сумма чисел равна 1 по модулю $k-1$. Как показано выше, эта сумма равна k. Но тогда для этого перехода симметричный ему тоже имеет первый тип и содержит те же самые числа, то есть один из переходов повторился, чего быть не должно.

2) Число k чётно. Тогда у центрального перехода в цепочке первый тип. Последняя левая клетка имеет нечётный номер, так как число $m-1$ нечётно, а k чётно. У первой правой клетки тоже нечётный номер, значит, при переходе второго типа чётность числа не меняется. Аналогично первому случаю можно показать, что среди них найдётся переход, пара чисел в котором даёт сумму k, и получаем такое же противоречие.

Замечание. После описания того, в каком порядке фишка обходит клетки диагонали (с левых сдвигается вправо на k клеток, а с правых — на $k-1$) решение можно завершить по-другому.

Пронумеруем все клетки диагонали числами от 1 до n слева направо. Проведём стрелку из каждой клетки в клетку, в которой фишка появляется в следующий раз; эти стрелки образуют путь, начинающийся в клетке k и заканчивающийся в клетке m. Добавим стрелку, ведущую из клетки m в клетку k; получим цикл, проходящий по всем клеткам диагонали.

Этот цикл определяет перестановку σ чисел $1, 2, \ldots, n$, где $\sigma(i)$ — это номер клетки, в которую ведёт стрелка из клетки i. Эта перестановка — цикл на n элементах. Напомним, что перестановка, являющаяся циклом на b элементах, имеет чётность, отличную от чётности числа b. Поэтому перестановка σ чётна.

С другой стороны, σ получается как композиция (последовательное применение) двух перестановок: τ, которая отправляет $x \mapsto x + (k-1) \bmod n$, и θ, действующей как $k \mapsto (k+1) \mapsto$ $\mapsto (k+2) \mapsto \ldots \mapsto (m+k-1) \mapsto k$. Перестановка τ состоит из нескольких циклов одинаковой длины; поэтому эти циклы нечётной длины, и потому τ чётна. Значит, и θ чётна, что как раз и означает, что m нечётно.

11 класс

11.1. Число x таково, что $\sin x + \operatorname{tg} x$ и $\cos x + \operatorname{ctg} x$ — рациональные числа. Докажите, что $\sin 2x$ является корнем квадратного уравнения с целыми коэффициентами. (*Н. Агаханов*)

Решение. Положим $a = \sin x + \operatorname{tg} x$ и $b = \cos x + \operatorname{ctg} x$. Введём обозначения: $u = \sin x + \cos x$ и $v = \sin x \cdot \cos x$. По условию рациональными являются числа $c = a + b = u + \frac{1}{v}$ и $d = a \cdot b = v + u + 1$. Отсюда $k = d - c = v + 1 - \frac{1}{v}$. Значит, $t = \sin 2x = 2v$ — корень квадратного уравнения $t^2 + 2t - (4 + 2kt) = 0$ с рациональными коэффициентами, откуда следует требуемое.

11.2. У 100 школьников есть стопка из 101 карточки, которые пронумерованы числами от 0 до 100. Первый школьник перемешивает стопку, затем берёт сверху из получившейся стопки по одной карточке, и при каждом взятии карточки (в том числе при первом) записывает на доску среднее арифметическое чисел на всех взятых им на данный момент карточках. Так он записывает 100 чисел, а когда в стопке остаётся одна карточка, он возвращает карточки в стопку, и далее всё то же самое, начиная с перемешивания стопки, проделывает второй школьник, потом третий, и т.д. Докажите, что среди выписанных на доске 10000 чисел найдутся два одинаковых. (*А. Грибалко*)

Решение. На 1-м шаге у каждого из 100 человек было выписано одно из чисел множества $A_1 = \{0, 1, 2, \ldots, 100\}$.

На 2-м шаге — одно из чисел множества $A_2 = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \ldots, \frac{199}{2}\right\}$.

На 100-м шаге выписано одно из чисел множества $A_{100} = \left\{\frac{S}{100}, \frac{S-1}{100}, \frac{S-2}{100}, \ldots, \frac{S-100}{100}\right\}$, где $S = \frac{100 \cdot 101}{2}$ — сумма всех чисел (а вычитается — число на оставшейся в конце карточке).

Видим, что $A_1 \cup A_2 = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \ldots, \frac{199}{2}, \frac{200}{2}\right\}$, так что $|A_1 \cup A_2| = 201$. Далее, $|A_{100}| = 101$, но числа $50 - \frac{1}{2}, 50, 50 + \frac{1}{2}$ принадлежат $A_2 \cap A_{100}$, значит, $|A_1 \cup A_2 \cup A_{100}| \leqslant 201 + 101 - 3 = 299$.

Итак, мы показали, что 300 чисел, выписанных на 1-м, 2-м и 100-м шагах, могут принимать не более 299 различных значений. Следовательно, какие-то два из них равны.

11.3. В каждой строке таблицы $100 \times n$ в некотором порядке стоят числа от 1 до 100, числа в строке не повторяются (в таблице n строк и 100 столбцов). Разрешается поменять местами в строке два числа, отличающиеся на 1, если они не стоят рядом. Оказалось, что с помощью таких операций нельзя получить двух одинаковых строк. При каком наибольшем n это возможно?

(*М. Антипов*)

Ответ. 2^{99}.

Решение. Сопоставим строке $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ чисел от 1 до 100 последовательность из 99 знаков $<$ и $>$ в соответствии с тем, как упорядочены соседние числа. То есть если $x_k < x_{k+1}$, то k-й знак в этой последовательности равен $<$, в противном случае он равен $>$. Заметим, что разрешённые операции над строкой не меняют соответствующую ей последовательность знаков. Действительно, из пары чисел x_k и x_{k+1} меняется не более одного и не более чем на 1. Поэтому знак неравенства между ними не может измениться на противоположный. Сопоставим каждой перестановке знаков расстановку чисел по следующему правилу (далее такие расстановки будем называть *выделенными*). При $k = 1, 2, \ldots, 99$ если $x_k > x_{k+1}$ (т.е. k-й знак $<$) поставим на место x_k наибольшее из не выбранных ранее чисел, если же $x_k < x_{k+1}$ — наименьшее из не выбранных ранее чисел. Заметим, что при такой последовательности операций числа, не выбранные за первые k шагов, будут образовывать отрезок натурального ряда (а выбранными окажутся несколько наибольших и несколько наименьших чисел от 1 до 100). В частности, $x_1 = 1$ или $x_1 = 100$. Число x_{100} заменим на единственное оставшееся число.

Нетрудно видеть, что полученная расстановка чисел соответствует выбранной последовательности знаков. Всего выделенных расстановок будет столько же, сколько и различных последовательностей знаков, то есть 2^{99}. В силу сказанного выше, разрешёнными операциями никакие две из выделенных строк разрешёнными операциями нельзя сделать одинаковыми. Таким образом, заполнив таблицу 100×2^{99} выделенными строками, мы получаем пример для $n = 2^{99}$.

Теперь докажем, что из любой строки A длины 100 можно получить выделенную строку B с той же расстановкой знаков. Из этого последует, что $n \leqslant 2^{99}$. Предположим, что первые $t-1$ знаков данной строки $A = (x_1, \ldots, x_{100})$ и выделенной строки $B = (y_1, \ldots, y_{100})$ совпадают. Если $t = 100$, то и сами строки совпадают. Пусть $t < 100$. Без ограничения общности будем считать, что $x_t < x_{t+1}$. В силу сказанного выше наборы чисел $y_t, \ldots, y_{100}$ и $x_t, \ldots, x_{100}$ совпадают и образуют отрезок натурального ряда с наименьшим числом x_t. Поскольку $y_t < y_{t+1}$, можно менять в строке A на месте t с числом на единицу меньшим, пока на месте t не окажется число x_t. Таким образом, мы добились совпадения первых t символов у нашей строки с выделенной строкой B. Значит, такими операциями можно из любой строки получить выделенную строку, что завершает доказательство оценки.

11.4. Окружность ω описана около треугольника ABC, в котором $AB < AC$. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке I. Из середины M стороны BC на прямую AI опущен перпендикуляр MH. Прямые MH, BI и AB ограничивают треугольник T_b, а прямые MH, CI и AC ограничивают треугольник T_c. Описанные окружности треугольников T_b и T_c повторно пересекают окружность ω в точках B' и C' соответственно. Докажите, что точка H лежит на прямой $B'C'$. (*А. Кузнецов*)

Решение. Обозначим точки пересечения прямой MH с прямыми AB, AC, BI и CI через P, Q, X и Y соответственно (см. рис. 4). Пусть прямые AI, BI и CI повторно пересекают ω в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Обозначим $\angle BAI = \angle CAI = \alpha$, $\angle ABI = \angle CBI = \beta$, $\angle ACI = \angle BCI = \gamma$, тогда $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$ из суммы углов треугольника ABC. Поскольку $MH \perp AI$, имеем $\angle AQM = 90^\circ - \alpha$. Так как четырёхугольник ABA_1C — вписанный, $\angle MA_1C = 90^\circ - \angle BCA_1 = 90^\circ - \alpha$. Таким образом, $\angle MA_1C + \angle MQC = 180^\circ$, поэтому четырёхугольник A_1CQM — вписанный. Следовательно, $\angle AQA_1 = 90^\circ$. Аналогично $\angle APA_1 = 90^\circ$, откуда следует, что точки A, A_1, P, Q лежат на окружности γ, построенной на отрезке AA_1 как на диаметре.

Теперь заметим, что $\angle QC'C = \angle QYC = 90^\circ - \angle CIA_1 = 90^\circ - \alpha - \gamma = \beta$. Однако из вписанности четырехугольника $BC'CB_1$ мы получаем, что $\angle CC'B_1 = \angle B_1BC = \beta = \angle CC'Q$. Следовательно, точки C', Q и B_1 лежат на одной прямой. Аналогично, точки P, B' и C_1 лежат на одной прямой.

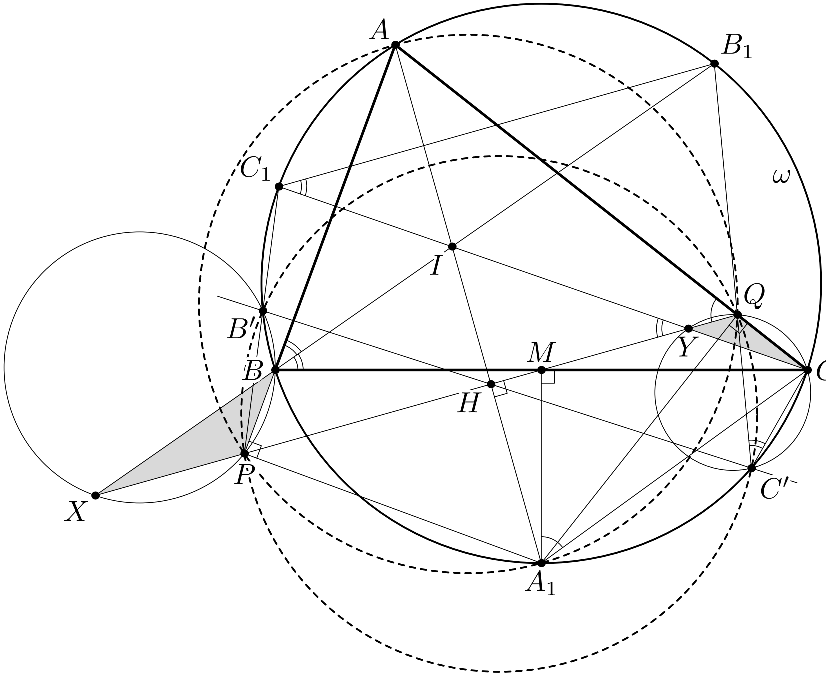

Рис. 4

В силу сказанного выше и вписанности четырёхугольника C_1B_1CB имеем, что $\angle CC_1B_1 = \beta = \angle CYQ$, поэтому $C_1B_1 \parallel PQ$. Поскольку четырёхугольник $B'C_1B_1C'$ вписанный, $\angle PB'C' = \angle C_1B_1C' = \angle PQC'$. Значит, четырехугольник $B'QC'P$ — вписанный. Тогда радикальные оси его описанной окружности, окружности γ и окружности ω пересекаются в одной точке, а это прямые $B'C'$, PQ и AA_1. Следовательно, точка H лежит на прямой $B'C'$, что и требовалось доказать.

Замечание. Приведём другой способ закончить решение после того, как установлено, что точки C', Q и B_1 лежат на одной прямой, и точки P, B' и C_1 лежат на одной прямой. Обозначим через N середину дуги BAC. Пусть прямая AX повторно пересекает окружность ω в точке T. Заметим, что $\angle CC'Y = \angle AQY = 90^\circ - \alpha = \frac{1}{2}\angle CC'B$. Следовательно, $C'Y$ — биссектриса угла $CC'B$, поэтому на прямой $C'Y$ лежит точка N. Аналогично, она лежит на прямой XB'. Применяя теорему Паскаля для точек $ATC'B_1BC$ мы получаем, что точка X, точка Q и точка пересечения $C'T$ и BC лежат на одной прямой. Следовательно, прямые BC, XQ и $C'T$ пересекаются в одной точке, то есть точка M лежит на $C'T$. Теперь применяем теорему Паскаля для точек $ATC'B'NA_1$ и получаем, что точки X и M вместе с точкой пересечения AA_1 и $B'C'$ лежат на одной прямой. Значит, точка H лежит на $B'C'$, что и требовалось.