# 9 класс

## Второй день

9.5. Если на столе лежит несколько кучек камней, считается, что на столе *много камней*, если можно найти 50 кучек и пронумеровать их числами от 1 до 50 так, что в первой кучке есть хотя бы один камень, во второй — хотя бы два камня, ..., в пятидесятой — хотя бы пятьдесят камней. Пусть исходно на столе лежат 100 кучек по 100 камней в каждой. Найдите наибольшее $n \leqslant 10\,000$ такое, что после удаления из исходных кучек любых $n$ камней на столе всё равно останется много камней. (При удалении камней кучка не распадается на несколько.)

9.6. Рассмотрим все 100-значные числа, делящиеся на 19. Докажите, что количество таких чисел, не содержащих цифр 4, 5 и 6, равно количеству таких чисел, не содержащих цифр 1, 4 и 7.

9.7. Дана трапеция $ABCD$, в которой $AD \parallel BC$, а лучи $AB$ и $DC$ пересекаются в точке $G$. Общие внешние касательные к окружностям, описанным около треугольников $ABC$ и $ACD$, пересекаются в точке $E$. Общие внешние касательные к окружностям, описанным около треугольников $ABD$ и $BCD$, пересекаются в точке $F$. Докажите, что точки $E$, $F$ и $G$ лежат на одной прямой.

9.8. У Пети есть 10 000 гирь, среди них нет двух гирь равного веса. Также у него есть чудо-прибор: если положить в него 10 гирь, он сообщит сумму весов каких-то двух из них (при этом неизвестно, каких именно). Докажите, что Петя может использовать чудо-прибор так, чтобы через некоторое время указать на одну из гирь и точно назвать её вес. (В чудо-прибор нельзя класть другое количество гирь.)

# 9 класс

## Второй день

9.5. Если на столе лежит несколько кучек камней, считается, что на столе *много камней*, если можно найти 50 кучек и пронумеровать их числами от 1 до 50 так, что в первой кучке есть хотя бы один камень, во второй — хотя бы два камня, ..., в пятидесятой — хотя бы пятьдесят камней. Пусть исходно на столе лежат 100 кучек по 100 камней в каждой. Найдите наибольшее $n \leqslant 10\,000$ такое, что после удаления из исходных кучек любых $n$ камней на столе всё равно останется много камней. (При удалении камней кучка не распадается на несколько.)

9.6. Рассмотрим все 100-значные числа, делящиеся на 19. Докажите, что количество таких чисел, не содержащих цифр 4, 5 и 6, равно количеству таких чисел, не содержащих цифр 1, 4 и 7.

9.7. Дана трапеция $ABCD$, в которой $AD \parallel BC$, а лучи $AB$ и $DC$ пересекаются в точке $G$. Общие внешние касательные к окружностям, описанным около треугольников $ABC$ и $ACD$, пересекаются в точке $E$. Общие внешние касательные к окружностям, описанным около треугольников $ABD$ и $BCD$, пересекаются в точке $F$. Докажите, что точки $E$, $F$ и $G$ лежат на одной прямой.

9.8. У Пети есть 10 000 гирь, среди них нет двух гирь равного веса. Также у него есть чудо-прибор: если положить в него 10 гирь, он сообщит сумму весов каких-то двух из них (при этом неизвестно, каких именно). Докажите, что Петя может использовать чудо-прибор так, чтобы через некоторое время указать на одну из гирь и точно назвать её вес. (В чудо-прибор нельзя класть другое количество гирь.)

# 10 класс

## Второй день

10.5. Найдите наибольшее натуральное число $n$, для которого произведение чисел $n$, $n+1$, $n+2$, $\ldots$, $n+20$ делится на квадрат какого-то одного из них.

10.6. Квадрат $100 \times 100$ разбит на квадраты $2 \times 2$. Потом его разбивают на доминошки (прямоугольники $1 \times 2$ и $2 \times 1$). Какое наименьшее количество доминошек могло оказаться внутри квадратов разбиения?

10.7. Дана трапеция $ABCD$, в которой $AD \parallel BC$, а лучи $AB$ и $DC$ пересекаются в точке $G$. Общие внешние касательные к окружностям, описанным около треугольников $ABC$ и $ACD$, пересекаются в точке $E$. Общие внешние касательные к окружностям, описанным около треугольников $ABD$ и $BCD$, пересекаются в точке $F$. Докажите, что точки $E$, $F$ и $G$ лежат на одной прямой.

10.8. Дано число $a \in (0,1)$. Положительные числа $x_0$, $x_1$, $\ldots$, $x_n$ удовлетворяют условиям $x_0 + x_1 + \ldots + x_n = n + a$ и $\dfrac{1}{x_0} + \dfrac{1}{x_1} + \ldots + \dfrac{1}{x_n} = n + \dfrac{1}{a}$. Найдите наименьшее значение выражения $x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2$.

# 10 класс

## Второй день

10.5. Найдите наибольшее натуральное число $n$, для которого произведение чисел $n$, $n+1$, $n+2$, $\ldots$, $n+20$ делится на квадрат какого-то одного из них.

10.6. Квадрат $100 \times 100$ разбит на квадраты $2 \times 2$. Потом его разбивают на доминошки (прямоугольники $1 \times 2$ и $2 \times 1$). Какое наименьшее количество доминошек могло оказаться внутри квадратов разбиения?

10.7. Дана трапеция $ABCD$, в которой $AD \parallel BC$, а лучи $AB$ и $DC$ пересекаются в точке $G$. Общие внешние касательные к окружностям, описанным около треугольников $ABC$ и $ACD$, пересекаются в точке $E$. Общие внешние касательные к окружностям, описанным около треугольников $ABD$ и $BCD$, пересекаются в точке $F$. Докажите, что точки $E$, $F$ и $G$ лежат на одной прямой.

10.8. Дано число $a \in (0,1)$. Положительные числа $x_0$, $x_1$, $\ldots$, $x_n$ удовлетворяют условиям $x_0 + x_1 + \ldots + x_n = n + a$ и $\dfrac{1}{x_0} + \dfrac{1}{x_1} + \ldots + \dfrac{1}{x_n} = n + \dfrac{1}{a}$. Найдите наименьшее значение выражения $x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2$.

# 11 класс

## Второй день

11.5. Изначально на доске написано 10 единиц. Гриша и Глеб играют в игру, делая ходы по очереди. Своим ходом Гриша возводит некоторые 5 чисел на доске в квадрат. Глеб своим ходом выбирает несколько (возможно, ни одного) чисел на доске и увеличивает каждое из них на 1. Если в течение 10 000 ходов на доске появится число, делящееся на 2023, то побеждает Глеб, иначе побеждает Гриша. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию, если первым ходит Гриша?

11.6. Плоскость $\alpha$ пересекает рёбра $AB$, $BC$, $CD$ и $DA$ тетраэдра $ABCD$ в точках $X$, $Y$, $Z$ и $T$ соответственно. Оказалось, что точки $Y$ и $T$ лежат на окружности $\omega$, построенной на отрезке $XZ$ как на диаметре. Точка $P$ отмечена в плоскости $\alpha$ так, что прямые $PY$ и $PT$ касаются окружности $\omega$. Докажите, что середины рёбер $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ и точка $P$ лежат в одной плоскости.

11.7. Назовём многочлен $P(x)$ *бицелозначным*, если числа $P(k)$ и $P'(k)$ целые при любом целом $k$. Пусть $P(x)$ — бицелозначный многочлен степени $d$, и пусть $N_d$ — произведение всех составных чисел, не превосходящих $d$ (произведение пустого множества сомножителей считаем равным 1). Докажите, что старший коэффициент многочлена $N_d \cdot P(x)$ — целый.

11.8. В стране $N$ городов. В ней действует $N(N-1)$ дорог с односторонним движением: по одной дороге из $X$ в $Y$ для каждой упорядоченной пары городов $X \neq Y$. У каждой дороги есть цена её обслуживания. Для данного $k = 1, \ldots, N$ рассмотрим все способы выделить $k$ городов и $N-k$ дорог так, чтобы из каждого города можно было попасть в какой-то выделенный город, пользуясь только выделенными дорогами. Такую систему городов и дорог с наименьшей суммарной стоимостью обслуживания назовём *$k$-оптимальной*. Докажите, что города можно пронумеровать от 1 до $N$ так, что при каждом $k = 1, 2, \ldots, N$ существует $k$-оптимальная система дорог с выделенными городами $1, 2, \ldots, k$.

# 11 класс

## Второй день

11.5. Изначально на доске написано 10 единиц. Гриша и Глеб играют в игру, делая ходы по очереди. Своим ходом Гриша возводит некоторые 5 чисел на доске в квадрат. Глеб своим ходом выбирает несколько (возможно, ни одного) чисел на доске и увеличивает каждое из них на 1. Если в течение 10 000 ходов на доске появится число, делящееся на 2023, то побеждает Глеб, иначе побеждает Гриша. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию, если первым ходит Гриша?

11.6. Плоскость $\alpha$ пересекает рёбра $AB$, $BC$, $CD$ и $DA$ тетраэдра $ABCD$ в точках $X$, $Y$, $Z$ и $T$ соответственно. Оказалось, что точки $Y$ и $T$ лежат на окружности $\omega$, построенной на отрезке $XZ$ как на диаметре. Точка $P$ отмечена в плоскости $\alpha$ так, что прямые $PY$ и $PT$ касаются окружности $\omega$. Докажите, что середины рёбер $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ и точка $P$ лежат в одной плоскости.

11.7. Назовём многочлен $P(x)$ *бицелозначным*, если числа $P(k)$ и $P'(k)$ целые при любом целом $k$. Пусть $P(x)$ — бицелозначный многочлен степени $d$, и пусть $N_d$ — произведение всех составных чисел, не превосходящих $d$ (произведение пустого множества сомножителей считаем равным 1). Докажите, что старший коэффициент многочлена $N_d \cdot P(x)$ — целый.

11.8. В стране $N$ городов. В ней действует $N(N-1)$ дорог с односторонним движением: по одной дороге из $X$ в $Y$ для каждой упорядоченной пары городов $X \neq Y$. У каждой дороги есть цена её обслуживания. Для данного $k = 1, \ldots, N$ рассмотрим все способы выделить $k$ городов и $N-k$ дорог так, чтобы из каждого города можно было попасть в какой-то выделенный город, пользуясь только выделенными дорогами. Такую систему городов и дорог с наименьшей суммарной стоимостью обслуживания назовём *$k$-оптимальной*. Докажите, что города можно пронумеровать от 1 до $N$ так, что при каждом $k = 1, 2, \ldots, N$ существует $k$-оптимальная система дорог с выделенными городами $1, 2, \ldots, k$.