11 класс

Задача 11.1. В корзине лежит 41 яблоко: 10 зелёных, 13 жёлтых и 18 красных. Алёна последовательно достаёт из корзины по одному яблоку. Если в какой-то момент она суммарно вытащит зелёных яблок меньше, чем жёлтых, а жёлтых — меньше, чем красных, то больше яблок из корзины она доставать не будет.
(а) *(1 балл)* Какое наибольшее количество жёлтых яблок сможет достать Алёна из корзины?
(б) *(3 балла)* Какое наибольшее количество яблок сможет достать Алёна из корзины?

Ответ: **(а)** 13 яблок. **(б)** 39 яблок.

Решение. **(а)** Алёна сможет достать из корзины все 13 жёлтых яблок, например, если первые 13 яблок окажутся жёлтыми. Так как ни в какой момент жёлтых яблок не становится меньше, чем красных, Алёна действительно сможет это сделать.

(б) Покажем, что Алёна может достать все яблоки, кроме двух жёлтых. Пусть для этого она достаёт сначала 10 зелёных, потом 18 красных, а потом 11 жёлтых. Заметим, что пока жёлтых не станет 11, условие о том, что зелёных яблок меньше, чем жёлтых, выполняться не будет. Таким образом, Алёна действительно сможет достать 39 яблок.

Теперь докажем, что больше 39 яблок Алёна достать не сможет. Предположим противное: Алёна в какой-то момент смогла достать 40 яблок. Перед тем, как доставать 40-е яблоко, жёлтых яблок у неё уже не менее 11. Зелёных яблок к этому моменту она вытащила не более 10, поэтому первое условие точно выполнено. С другой стороны, жёлтых яблок к этому моменту она вытащила не более 13, а красных — не менее 16, поэтому и второе условие тоже точно выполнено. Но тогда доставать 40-е яблоко она не будет, противоречие. □

Задача 11.2. В зоопарк для кормления трёх обезьян привезли апельсины, бананы и кокосы, фруктов всех трёх видов было поровну. Первую обезьяну кормили только апельсинами и бананами, причём бананов было на 40% больше, чем апельсинов. Вторую кормили только бананами и кокосами, причём кокосов было на 25% больше, чем бананов. А третью кормили только кокосами и апельсинами, причём апельсинов было в 2 раза больше, чем кокосов. Обезьяны съели все привезённые фрукты.

Пусть первая обезьяна съела a апельсинов, а третья обезьяна съела b апельсинов. Найдите a/b.

Ответ: $1/2$.

Решение. Пусть первая обезьяна съела x апельсинов, вторая обезьяна съела y кокосов, а третья обезьяна съела z кокосов. Тогда первая обезьяна съела $1{,}4x$ бананов; вторая обезьяна съела $1{,}25y$ кокосов; третья обезьяна съела $2z$ апельсинов. Поскольку всех фруктов съедено поровну, имеем

$$x + 2z = 1{,}4x + y = 1{,}25y + z.$$

Перепишем это в виде системы:

$$\begin{cases} x + 2z = 1{,}25y + z, \\ x + 2z = 1{,}4x + y. \end{cases}$$

Сгруппировав одинаковые слагаемые, получим

$$\begin{cases} x + z = 1{,}25y, \\ 2z = 0{,}4x + y. \end{cases}$$

Домножив первое равенство на 2 и вычтя из него второе, получим $2x = 1{,}5y - 0{,}4x$, откуда $2{,}4x = 1{,}5y$ и $y = 1{,}6x$. Подставляя это в уравнение $x + z = 1{,}25y$, получаем $x + z = 2x$, т. е. $z = x$.

Теперь можно ответить на вопрос задачи. Первая обезьяна апельсинов съела x, а третья — $2z = 2x$. Значит, искомое отношение равно $1/2$. $\square$

Задача 11.3. Многочлен $G(x)$ с действительными коэффициентами принимает значение 2022 ровно в пяти различных точках $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$. Известно, что график функции $y = G(x)$ симметричен относительно прямой $x = -8$.
(а) *(2 балла)* Найдите $x_1 + x_3 + x_5$.
(б) *(2 балла)* Какую наименьшую степень может иметь $G(x)$?

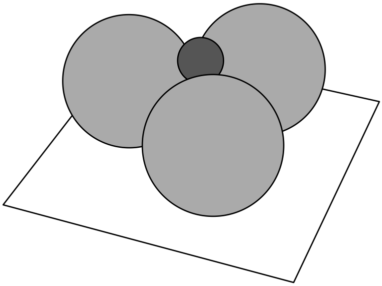
Ответ: **(а)** -24. **(б)** 6.

Решение. **(а)** Поскольку график $G(x)$ симметричен относительно прямой $x = -8$, то точки, в которых он принимает одинаковое значение, должны разбиваться на пары симметричных, кроме, возможно, одной из точек, которая лежит на оси симметрии. Поэтому средняя из пяти данных точек должна лежать на оси симметрии, т. е. $x_3 = -8$. Первая и пятая точки должны быть симметричны относительно прямой $x = -8$, поэтому $x_1 + x_5 = 2 \cdot (-8) = -16$. Итого $x_1 + x_3 + x_5 = -24$.

(б) Рассмотрим вспомогательный многочлен $F(x) = G(x - 8) - 2022$. Очевидно, что степень $F(x)$ совпадает со степенью $G(x)$. График $F(x)$ получается параллельным переносом графика $G(x)$ на 8 вправо и на 2022 вниз. Тогда этот график симметричен относительно прямой $x = 0$, причём в пяти точках $F(x)$ принимает значение 0. Ясно, что у $F(x)$ ровно 5 различных корней, поэтому его степень не меньше 5. С другой стороны, так как график $F(x)$ симметричен относительно прямой $x = 0$, то функция $F(x)$ — чётная, поэтому и степень $F(x)$ тоже чётная. Значит, степень $F(x)$, как и степень $G(x)$, не меньше 6.

В качестве примера многочлена степени 6 можно взять $F(x) = (x+2)(x+1)x^2(x-1)(x-2)$. Ему соответствует $G(x) = (x + 10)(x + 9)(x + 8)^2(x + 7)(x + 6) + 2022$. $\square$

Задача 11.4. На горизонтальном полу лежат три волейбольных мяча радиусом 18, попарно касающиеся друг друга. Сверху положили теннисный мяч радиусом 6, касающийся всех трёх волейбольных мячей. Найдите расстояние от верхней точки теннисного мяча до пола. (Все мячи имеют форму шара.)



Ответ: 36.

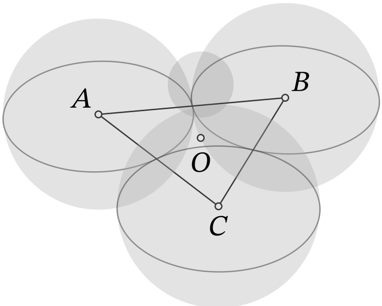


Рис. 9: к решению задачи 11.4

Решение. Центры волейбольных мячей обозначим через A, B, C, а центр теннисного — через D; верхнюю точку теннисного мяча обозначим через X.

Рассмотрим сечение волейбольных мячей плоскостью ABC (рис. 9). Это три попарно касающиеся окружности радиусом 18. Следовательно, точки A, B, C расположены в вершинах правильного треугольника со стороной 36. Центр этого треугольника обозначим за O; тогда $OA = 18/\cos(30°) = 12\sqrt{3}$ (из прямоугольного треугольника OAM, где M — середина AB).

Из соображений симметрии ясно, что точки X, D и O лежат на одной вертикальной прямой. Рассмотрим сечение теннисного мяча и одного из волейбольных плоскостью ADO (рис. 10). Треугольник ADO прямоугольный, $AD = 18 + 6 = 24$, по теореме Пифагора имеем

$$OD = \sqrt{AD^2 - OA^2} = 12.$$

Сама точка O, как и вся плоскость ABC, находится на высоте радиуса волейбольного мяча, то есть 18; точка D, как мы выяснили, выше неё на 12; а точка X выше точки D на радиус теннисного мяча, то есть на 6. В сумме получаем $18 + 12 + 6 = 36$. □

Задача 11.5. Юра и Яша играют в следующую игру, делая ходы по очереди. Первым ходит Юра.

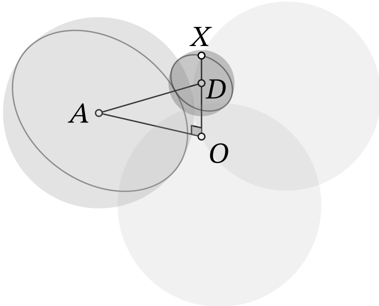


Рис. 10: к решению задачи 11.4

Изначально на доске написано число n. Игрок в свой ход может прибавить к числу на доске любой его натуральный делитель, стереть старое число и записать новое. (Например, если на доске написано число 12, то можно его стереть и написать одно из чисел $13, 14, 15, 16, 18, 24$.)

Рассмотрим все возможные натуральные значения n от 2 до 59 включительно.
(а) *(2 балла)* Для скольких из них Юра имеет выигрышную стратегию, если **проигрывает** тот, кто получит после своего хода число, не меньшее 60?
(б) *(2 балла)* Для скольких из них Юра имеет выигрышную стратегию, если **побеждает** тот, кто получит после своего хода число, не меньшее 60?

Ответ: **(а)** 29. **(б)** 44.

Решение. **(а)** Докажем, что игрок, начинающий с чётного числа, выигрывает, а игрок, начинающий с нечётного числа, проигрывает. Действительно, игрок, которому пришло чётное число, может прибавлять к нему 1 (т. к. единица является делителем всех натуральных чисел) и получать нечётное число. Его соперник вынужден прибавлять к нему какое-то нечётное число и получать чётное число. Таким образом, игрок начинающий с чётного числа, выигрывает, т. к. ему каждый ход приходит чётное число, к которому он прибавляет 1 (а из чётного числа, меньшего 60, таким образом нельзя получить число, не меньшее 60). Соответственно, игрок, начинающий с нечётного числа, проигрывает.

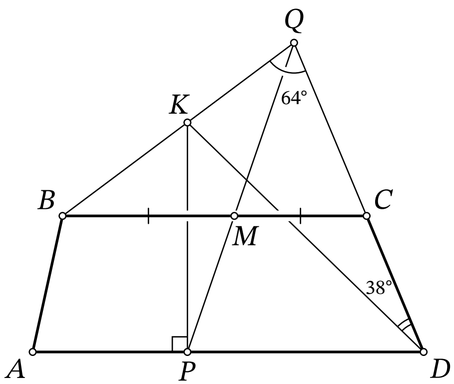
Таким образом, Юра выигрывает, если n — любое чётное число от 2 до 59, коих 29 штук.

(б) Заметим, что если игроку пришло число, большее 30, то он может прибавить к нему его же и получить число, не меньшее 60. Поэтому если начальное число не меньше 30, то выигрывает Юра. Таких чисел 30.

Если же начальное число меньше 30, то игра превращается в игру из пункта (а), только теперь проигрывает игрок, который на своём ходу получает число, которое не меньше 30. Рассуждая аналогично, можно понять, что Юра выигрывает, только если начальное число чётное. Таких чисел от 2 до 29 ровно 14. Итого получаем, что Юра выигрывает при $30 + 14 = 44$ значениях n. $\square$

Задача 11.6. Точка M — середина основания BC трапеции $ABCD$. На основании AD выбрана точка P. Луч PM пересекает луч DC в точке Q. Перпендикуляр к основанию AD, проведённый через точку P, пересекает отрезок BQ в точке K.

Известно, что $\angle KQD = 64°$ и $\angle KDQ = 38°$. Сколько градусов составляет угол KBC?



Ответ: 39°.

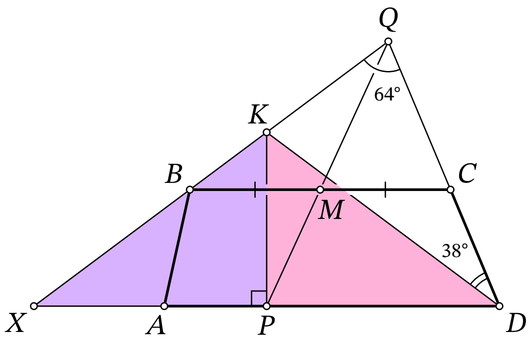


Рис. 11: к решению задачи 11.6

Решение. Из условия следует, что $\angle BKD = \angle KQD + \angle KDQ = 64° + 38° = 102°$.

Пусть прямые QB и AD пересекаются в точке X (рис. 11). Треугольники QXP и QBM подобны с коэффициентом QP/QM, и с тем же коэффициентом подобны треугольники QDP и QCM. Тогда из равенства $MB = MC$ следует, что $PX = PD$. Значит, точка K лежит на серединном перпендикуляре к отрезку XD, поэтому $\angle KXD = \angle KDX = \frac{1}{2}(180° - 102°) = 39°$. Поскольку $BC \parallel AD$, получаем, что $\angle KBC = \angle KXD = 39°$. □

Замечание. Также равенство $PX = PD$ можно было установить с помощью гомотетии с центром Q, переводящей треугольник QBC в треугольник QXD.

Задача 11.7. Пусть N — наименьшее общее кратное десяти различных натуральных чисел $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{10}$.
(а) *(2 балла)* Какое наименьшее значение может принимать N/a_3?
(б) *(2 балла)* Укажите все возможные значения a_3 на отрезке $[1; 1000]$, для которых величина N/a_1 может принимать своё наименьшее значение.

Ответ: **(а)** 8. **(б)** 315, 630, 945.

Решение. **(а)** Заметим, что N кратно любому из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$. Это означает, что числа $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ можно представить в виде $a_1 = N/b_1$, $a_2 = N/b_2$, ..., $a_{10} = N/b_{10}$, где $b_1, b_2, \ldots, b_{10}$ — различные натуральные числа. Поскольку $a_1 < a_2 < \ldots < a_{10}$, получаем, что $b_1 > b_2 > \ldots > b_{10}$. Отсюда ясно, что $N/a_3 = b_3 \geqslant 8$, так как оно больше каких-то 7 различных натуральных чисел.

При этом значение $b_3 = 8$ достигается, например, в случае

$$N = 10!,\ a_1 = \frac{10!}{10},\ a_2 = \frac{10!}{9},\ a_3 = \frac{10!}{8},\ \ldots,\ a_{10} = \frac{10!}{1}.$$

(б) Аналогично пункту (а) можно понять, что наименьшее значение $b_1 = N/a_1$ равно 10, при этом оно может достигаться только в случае, если $b_{10} = 1$, $b_9 = 2$, ..., $b_2 = 9$. Заметим, что числа $b_1, b_2, \ldots, b_{10}$ являются делителями числа N, т. е. N должно делиться на все натуральные числа от 1 до 10. Таким образом, $N = k \cdot \text{НОД}(1, 2, \ldots, 10)$.

Чтобы найти НОК чисел от 1 до 10, нужно для каждого простого числа понять, на какую его максимальную степень делятся эти числа. Для 2 такая степень равна 3 ($8 = 2^3$); для 3 она равна 2 ($9 = 3^2$); для 5 и 7 она равна 1. Таким образом,

$$\text{НОД}(1, 2, \ldots, 10) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520.$$

Отсюда получаем, что

$$a_3 = \frac{N}{b_3} = \frac{N}{8} = \frac{k \cdot 2520}{8} = 315 \cdot k.$$

Среди чисел от 1 до 1000 нужный вид имеют ровно 3 числа: 315, 630, 945. Все они удовлетворяют условию задачи. □

Задача 11.8. Действительные числа a, b, c таковы, что

$$\begin{cases} a^2 + ab + b^2 = 11, \\ b^2 + bc + c^2 = 11. \end{cases}$$

(а) *(1 балл)* Какое наименьшее значение может принимать выражение $c^2 + ca + a^2$?
(б) *(3 балла)* Какое наибольшее значение может принимать выражение $c^2 + ca + a^2$?

Ответ: **(а)** 0; **(б)** 44.

Решение. **(а)** Заметим, что если $a = c = 0$, а $b = \sqrt{11}$, то данная в условии система равенств выполнена, а $c^2 + ca + a^2$ равно 0. С другой стороны,

$$c^2 + ca + a^2 = \frac{c^2}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{(c+a)^2}{2} \geqslant 0.$$

Значит, наименьшее значение выражения $c^2 + ca + a^2$ равно 0.

(б) Будем пользоваться формулой $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$. Домножим первое равенство на $a - b$, а второе — на $b - c$, получим

$$\begin{cases} a^3 - b^3 = 11(a - b), \\ b^3 - c^3 = 11(b - c). \end{cases}$$

Сложив эти два уравнения, получим $a^3 - c^3 = 11(a - c)$, откуда при $a \neq c$ следует, что $a^2 + ac + c^2 = 11$. Осталось выяснить, что будет, если $a = c$.

В случае $a = c$ оба равенства в системе одинаковы, а максимизировать нужно выражение $3a^2$. Случай $a = c = 0$ уже рассмотрен в предыдущем пункте, поэтому дальше будем рассматривать $a \neq 0$. Пусть $b = ka$ для некоторого действительного k. Тогда из условия имеем

$$a^2 + ka^2 + k^2a^2 = 11 \quad \text{и} \quad a^2 = \frac{11}{1 + k + k^2}.$$

Заметим, что

$$1 + k + k^2 = \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{2} + k\right)^2 \geqslant \frac{3}{4}.$$

Следовательно,

$$a^2 \leqslant \frac{11}{3/4} = \frac{44}{3} \quad \text{и} \quad 3a^2 \leqslant \frac{44}{3} \cdot 3 = 44.$$

Ясно, что это значение достигается, если $a = c = \sqrt{44/3}$, $b = -\sqrt{11/3}$. □

Другое решение пункта (б). Выделим в левых частях данных равенств полные квадраты:

$$\begin{cases} \frac{3}{4}a^2 + \left(\frac{1}{2}a + b\right)^2 = 11, \\ \frac{3}{4}c^2 + \left(\frac{1}{2}c + b\right)^2 = 11. \end{cases}$$

Из того, что $(\frac{1}{2}a+b)^2$ и $(\frac{1}{2}c+b)^2$ неотрицательны, следует, что $\frac{3}{4}a^2 \leqslant 11$ и $\frac{3}{4}c^2 \leqslant 11$. Значит, $|a| \leqslant \sqrt{44/3}$ и $|c| \leqslant \sqrt{44/3}$.

Оценим искомое выражение:

$$c^2 + ac + a^2 \leqslant c^2 + |a| \cdot |c| + a^2 \leqslant \frac{44}{3} + \sqrt{\frac{44}{3}} \cdot \sqrt{\frac{44}{3}} + \frac{44}{3} = 44.$$

Тем самым искомое выражение не превосходит 44, причём достигается это значение при $a = c = \sqrt{44/3}$ и $b = -a/2 = -\sqrt{11/3}$. □

Ещё решение. Отметим на плоскости точку O и проведем через неё три координатные прямые Oa, Ob, Oc под углами 120° друг к другу (рис. 12а). Считая O началом координат на каждой из прямых, отметим на них точки A, B, C соответственно с координатами, равными данным числам a, b, c.

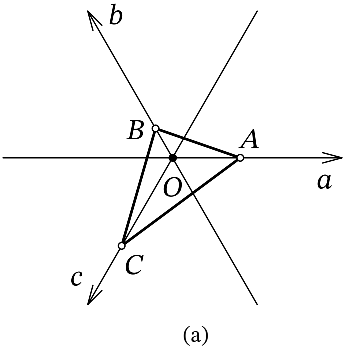


Рис. 12: к решению задачи 11.8

Заметим, что $AB^2 = a^2 + ab + b^2$. Действительно, в случае $a, b > 0$ это просто теорема косинусов для треугольника AOB со сторонами a и b и углом 120° между ними. Но это равенство сохраняется и в остальных случаях. Например, при $a > 0$ и $b < 0$ (рис. 12б) имеем $OB = -b$ и $\angle AOB = 60°$, откуда

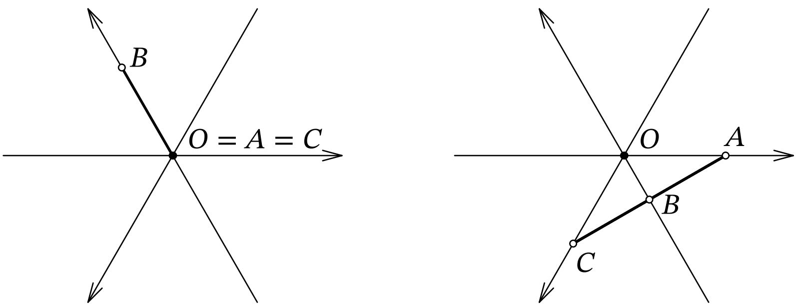
$$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2\cos(60°) \cdot AO \cdot BO = a^2 + b^2 + ab\,.$$

Аналогично получаем $BC^2 = b^2 + bc + c^2$ и $CA^2 = c^2 + ca + a^2$. Теперь нетрудно переформулировать исходную задачу:

На трёх прямых, пересекающихся в одной точке под углами 60° друг к другу, отмечены точки A, B, C соответственно (возможно, совпадающие). Дано $AB = BC = \sqrt{11}$; нужно найти наименьшее и наибольшее возможное значение AC^2.

(а) Ясно, что наименьшее значение — это 0, которое достигается при $A = C = O$ (рис. 13а).

(б) С другой стороны, из неравенства треугольника имеем $AC \leqslant AB + BC = 2\sqrt{11}$, что достигается, если точки A, B, C находятся на одной прямой (рис. 13б). □



(а) (б)

Рис. 13: к решению задачи 11.8

11 класс

Вариант 11.1.1. В корзине лежит 41 яблоко: 10 зелёных, 13 жёлтых и 18 красных. Алёна последовательно достаёт из корзины по одному яблоку. Если в какой-то момент она суммарно вытащит зелёных яблок меньше, чем жёлтых, а жёлтых — меньше, чем красных, то больше яблок из корзины она доставать не будет.
(а) *(1 балл)* Какое наибольшее количество жёлтых яблок сможет достать Алёна из корзины?
(б) *(3 балла)* Какое наибольшее количество яблок сможет достать Алёна из корзины?

Ответ: **(а)** 13 яблок. **(б)** 39 яблок.

Вариант 11.1.2. В корзине лежит 38 яблок: 9 зелёных, 12 жёлтых и 17 красных. Алёна последовательно достаёт из корзины по одному яблоку. Если в какой-то момент она суммарно вытащит зелёных яблок меньше, чем жёлтых, а жёлтых — меньше, чем красных, то больше яблок из корзины она доставать не будет.
(а) *(1 балл)* Какое наибольшее количество жёлтых яблок сможет достать Алёна из корзины?
(б) *(3 балла)* Какое наибольшее количество яблок сможет достать Алёна из корзины?

Ответ: **(а)** 12 яблок. **(б)** 36 яблок.

Вариант 11.1.3. В корзине лежит 35 яблок: 8 зелёных, 11 жёлтых и 16 красных. Алёна последовательно достаёт из корзины по одному яблоку. Если в какой-то момент она суммарно вытащит зелёных яблок меньше, чем жёлтых, а жёлтых — меньше, чем красных, то больше яблок из корзины она доставать не будет.
(а) *(1 балл)* Какое наибольшее количество жёлтых яблок сможет достать Алёна из корзины?
(б) *(3 балла)* Какое наибольшее количество яблок сможет достать Алёна из корзины?

Ответ: **(а)** 11 яблок. **(б)** 33 яблока.

Вариант 11.1.4. В корзине лежит 44 яблока: 11 зелёных, 14 жёлтых и 19 красных. Алёна последовательно достаёт из корзины по одному яблоку. Если в какой-то момент она суммарно вытащит зелёных яблок меньше, чем жёлтых, а жёлтых — меньше, чем красных, то больше яблок из корзины она доставать не будет.
(а) *(1 балл)* Какое наибольшее количество жёлтых яблок сможет достать Алёна из корзины?
(б) *(3 балла)* Какое наибольшее количество яблок сможет достать Алёна из корзины?

Ответ: **(а)** 14 яблок. **(б)** 42 яблока.

Вариант 11.2.1. В зоопарк для кормления трёх обезьян привезли апельсины, бананы и кокосы, фруктов всех трёх видов было поровну. Первую обезьяну кормили только апельсинами и бананами, причём бананов было на 40% больше, чем апельсинов. Вторую кормили только бананами и кокосами, причём кокосов было на 25% больше, чем бананов. А третью кормили только кокосами и апельсинами, причём апельсинов было в 2 раза больше, чем кокосов. Обезьяны съели все привезённые фрукты.

Пусть первая обезьяна съела a апельсинов, а третья обезьяна съела b апельсинов. Найдите a/b.

Ответ: 1/2.

Вариант 11.2.2. В зоопарк для кормления трёх обезьян привезли апельсины, бананы и кокосы, фруктов всех трёх видов было поровну. Первую обезьяну кормили только апельсинами и бананами, причём бананов было на 40% больше, чем апельсинов. Вторую кормили только бананами и кокосами, причём кокосов было на 25% больше, чем бананов. А третью кормили только кокосами и апельсинами, причём апельсинов было в 2 раза больше, чем кокосов. Обезьяны съели все привезённые фрукты.

Пусть первая обезьяна съела a бананов, а вторая обезьяна съела b бананов. Найдите a/b.

Ответ: 7/8.

Вариант 11.2.3. В зоопарк для кормления трёх обезьян привезли апельсины, бананы и кокосы, фруктов всех трёх видов было поровну. Первую обезьяну кормили только апельсинами и бананами, причём бананов было на 60% больше, чем апельсинов. Вторую кормили только бананами и кокосами, причём кокосов было на 25% больше, чем бананов. А третью кормили только кокосами и апельсинами, причём апельсинов было в 3 раза больше, чем кокосов. Обезьяны съели все привезённые фрукты.

Пусть первая обезьяна съела a апельсинов, а третья обезьяна съела b апельсинов. Найдите a/b.

Ответ: 1/3.

Вариант 11.2.4. В зоопарк для кормления трёх обезьян привезли апельсины, бананы и кокосы, фруктов всех трёх видов было поровну. Первую обезьяну кормили только апельсинами и бананами, причём бананов было на 60% больше, чем апельсинов. Вторую кормили только бананами и кокосами, причём кокосов было на 25% больше, чем бананов. А третью кормили только кокосами и апельсинами, причём апельсинов было в 3 раза больше, чем кокосов. Обезьяны съели все привезённые фрукты.

Пусть первая обезьяна съела a бананов, а вторая обезьяна съела b бананов. Найдите a/b.

Ответ: 2/3.

Вариант 11.3.1. Многочлен $G(x)$ с действительными коэффициентами принимает значение 2022 ровно в пяти различных точках $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$. Известно, что график

функции $y = G(x)$ симметричен относительно прямой $x = -8$.
(а) *(2 балла)* Найдите $x_1 + x_3 + x_5$.
(б) *(2 балла)* Какую наименьшую степень может иметь $G(x)$?

Ответ: **(а)** -24. **(б)** 6.

Вариант 11.3.2.

Ответ: **(а)** -27. **(б)** 6.

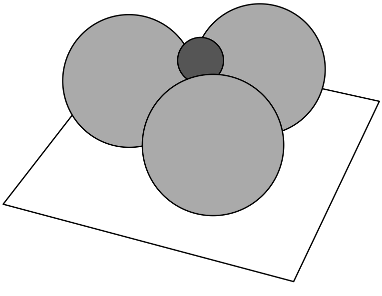
Вариант 11.3.3. Многочлен $G(x)$ с действительными коэффициентами принимает значение 2022 ровно в пяти различных точках $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$. Известно, что график функции $y = G(x)$ симметричен относительно прямой $x = -7$.
(а) *(2 балла)* Найдите $x_1 + x_3 + x_5$.
(б) *(2 балла)* Какую наименьшую степень может иметь $G(x)$?

Ответ: **(а)** -21. **(б)** 6.

Вариант 11.3.4. Многочлен $G(x)$ с действительными коэффициентами принимает значение 2022 ровно в пяти различных точках $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$. Известно, что график функции $y = G(x)$ симметричен относительно прямой $x = -6$.
(а) *(2 балла)* Найдите $x_1 + x_3 + x_5$.
(б) *(2 балла)* Какую наименьшую степень может иметь $G(x)$?

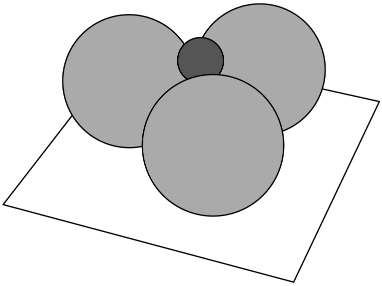
Ответ: **(а)** -18. **(б)** 6.

Вариант 11.4.1. На горизонтальном полу лежат три волейбольных мяча радиусом 18, попарно касающиеся друг друга. Сверху положили теннисный мяч радиусом 6, касающийся всех трёх волейбольных мячей. Найдите расстояние от верхней точки теннисного мяча до пола. (Все мячи имеют форму шара.)



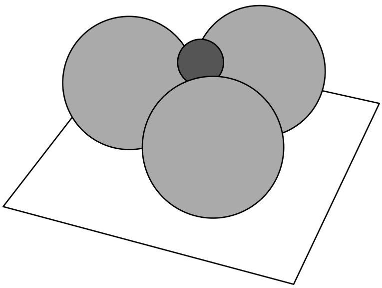
Ответ: 36.

Вариант 11.4.2. На горизонтальном полу лежат три волейбольных мяча радиусом 21, попарно касающиеся друг друга. Сверху положили теннисный мяч радиусом 7, касающийся всех трёх волейбольных мячей. Найдите расстояние от верхней точки теннисного мяча до пола. (Все мячи имеют форму шара.)



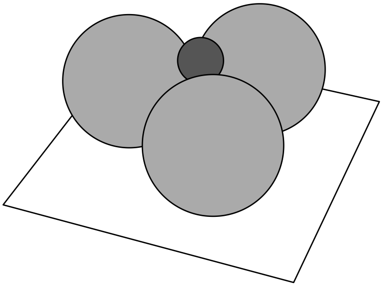
Ответ: 42.

Вариант 11.4.3. На горизонтальном полу лежат три волейбольных мяча радиусом 24, попарно касающиеся друг друга. Сверху положили теннисный мяч радиусом 8, касающийся всех трёх волейбольных мячей. Найдите расстояние от верхней точки теннисного мяча до пола. (Все мячи имеют форму шара.)



Ответ: 48.

Вариант 11.4.4. На горизонтальном полу лежат три волейбольных мяча радиусом 27, попарно касающиеся друг друга. Сверху положили теннисный мяч радиусом 9, касающийся всех трёх волейбольных мячей. Найдите расстояние от верхней точки теннисного мяча до пола. (Все мячи имеют форму шара.)



Ответ: 54.

Вариант 11.5.1. Юра и Яша играют в следующую игру, делая ходы по очереди. Первым ходит Юра.

Изначально на доске написано число n. Игрок в свой ход может прибавить к числу на доске любой его натуральный делитель, стереть старое число и записать новое. (Например, если на доске написано число 12, то можно его стереть и написать одно из чисел $13, 14, 15, 16, 18, 24$.)

Рассмотрим все возможные натуральные значения n от 2 до 59 включительно.
(а) *(2 балла)* Для скольких из них Юра имеет выигрышную стратегию, если **проигрывает** тот, кто получит после своего хода число, не меньшее 60?
(б) *(2 балла)* Для скольких из них Юра имеет выигрышную стратегию, если **побеждает** тот, кто получит после своего хода число, не меньшее 60?

Ответ: **(а)** 29. **(б)** 44.

Вариант 11.5.2. Юра и Яша играют в следующую игру, делая ходы по очереди. Первым ходит Юра.

Изначально на доске написано число n. Игрок в свой ход может прибавить к числу на доске любой его натуральный делитель, стереть старое число и записать новое. (Например, если на доске написано число 12, то можно его стереть и написать одно из чисел $13, 14, 15, 16, 18, 24$.)

Рассмотрим все возможные натуральные значения n от 2 до 79 включительно.
(а) *(2 балла)* Для скольких из них Юра имеет выигрышную стратегию, если **проигрывает** тот, кто получит после своего хода число, не меньшее 80?
(б) *(2 балла)* Для скольких из них Юра имеет выигрышную стратегию, если **побеждает** тот, кто получит после своего хода число, не меньшее 80?

Ответ: **(а)** 39. **(б)** 59.

Вариант 11.5.3. Юра и Яша играют в следующую игру, делая ходы по очереди. Первым ходит Юра.

Изначально на доске написано число n. Игрок в свой ход может прибавить к числу на доске любой его натуральный делитель, стереть старое число и записать новое. (Например, если на доске написано число 12, то можно его стереть и написать одно из чисел $13, 14, 15, 16, 18, 24$.)

Рассмотрим все возможные натуральные значения n от 2 до 99 включительно.
(а) *(2 балла)* Для скольких из них Юра имеет выигрышную стратегию, если **проигрывает** тот, кто получит после своего хода число, не меньшее 100?
(б) *(2 балла)* Для скольких из них Юра имеет выигрышную стратегию, если **побеждает** тот, кто получит после своего хода число, не меньшее 100?

Ответ: **(а)** 49. **(б)** 74.

Вариант 11.5.4. Юра и Яша играют в следующую игру, делая ходы по очереди. Первым ходит Юра.

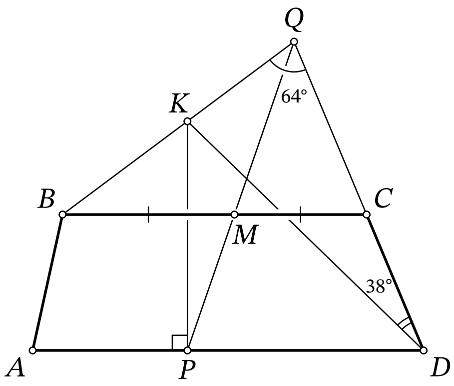
Изначально на доске написано число n. Игрок в свой ход может прибавить к числу на доске любой его натуральный делитель, стереть старое число и записать новое. (Например, если на доске написано число 12, то можно его стереть и написать одно из чисел $13, 14, 15, 16, 18, 24$.)

Рассмотрим все возможные натуральные значения n от 2 до 119 включительно.
(а) *(2 балла)* Для скольких из них Юра имеет выигрышную стратегию, если **проигрывает** тот, кто получит после своего хода число, не меньшее 120?
(б) *(2 балла)* Для скольких из них Юра имеет выигрышную стратегию, если **побеждает** тот, кто получит после своего хода число, не меньшее 120?

Ответ: **(а)** 59. **(б)** 89.

Вариант 11.6.1. Точка M — середина основания BC трапеции $ABCD$. На основании AD выбрана точка P. Луч PM пересекает луч DC в точке Q. Перпендикуляр к основанию AD, проведённый через точку P, пересекает отрезок BQ в точке K.

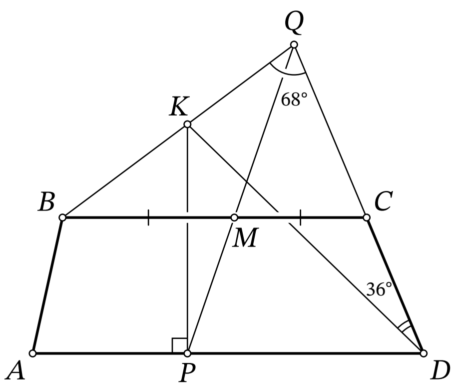
Известно, что $\angle KQD = 64^\circ$ и $\angle KDQ = 38^\circ$. Сколько градусов составляет угол KBC?



Ответ: 39°.

Вариант 11.6.2. Точка M — середина основания BC трапеции $ABCD$. На основании AD выбрана точка P. Луч PM пересекает луч DC в точке Q. Перпендикуляр к основанию AD, проведённый через точку P, пересекает отрезок BQ в точке K.

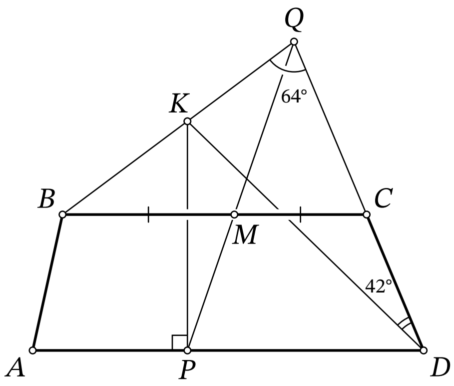
Известно, что $\angle KQD = 68°$ и $\angle KDQ = 36°$. Сколько градусов составляет угол KBC?



Ответ: 38°.

Вариант 11.6.3. Точка M — середина основания BC трапеции $ABCD$. На основании AD выбрана точка P. Луч PM пересекает луч DC в точке Q. Перпендикуляр к основанию AD, проведённый через точку P, пересекает отрезок BQ в точке K.

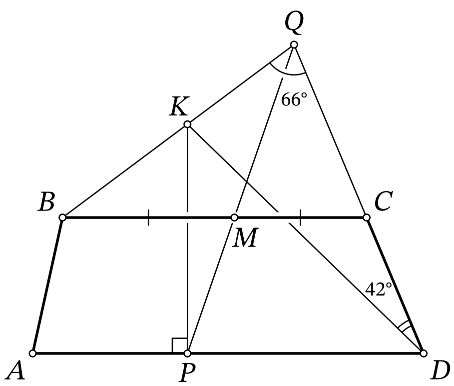
Известно, что $\angle KQD = 64°$ и $\angle KDQ = 42°$. Сколько градусов составляет угол KBC?



Ответ: 37°.

Вариант 11.6.4. Точка M — середина основания BC трапеции $ABCD$. На основании AD выбрана точка P. Луч PM пересекает луч DC в точке Q. Перпендикуляр к основанию AD, проведённый через точку P, пересекает отрезок BQ в точке K.

Известно, что $\angle KQD = 66°$ и $\angle KDQ = 42°$. Сколько градусов составляет угол KBC?



Ответ: 36°.

Вариант 11.7.1. Пусть N — наименьшее общее кратное десяти различных натуральных чисел $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{10}$.
(а) *(2 балла)* Какое наименьшее значение может принимать N/a_3?
(б) *(2 балла)* Укажите все возможные значения a_3 на отрезке $[1; 1000]$, для которых величина N/a_1 может принимать своё наименьшее значение.

Ответ: **(а)** 8. **(б)** 315, 630, 945.

Вариант 11.7.2. Пусть N — наименьшее общее кратное десяти различных натуральных чисел $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{10}$.

(а) *(2 балла)* Какое наименьшее значение может принимать N/a_4?

(б) *(2 балла)* Укажите все возможные значения a_4 на отрезке $[1; 1300]$, для которых величина N/a_1 может принимать своё наименьшее значение.

Ответ: **(а)** 7. **(б)** 360, 720, 1080.

Вариант 11.7.3. Пусть N — наименьшее общее кратное десяти различных натуральных чисел $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{10}$.

(а) *(2 балла)* Какое наименьшее значение может принимать N/a_5?

(б) *(2 балла)* Укажите все возможные значения a_5 на отрезке $[1; 1500]$, для которых величина N/a_1 может принимать своё наименьшее значение.

Ответ: **(а)** 6. **(б)** 420, 840, 1260.

Вариант 11.7.4. Пусть N — наименьшее общее кратное десяти различных натуральных чисел $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{10}$.

(а) *(2 балла)* Какое наименьшее значение может принимать N/a_6?

(б) *(2 балла)* Укажите все возможные значения a_6 на отрезке $[1; 2000]$, для которых величина N/a_1 может принимать своё наименьшее значение.

Ответ: **(а)** 5. **(б)** 504, 1008, 1512.

Вариант 11.8.1. Действительные числа a, b, c таковы, что

$$\begin{cases} a^2 + ab + b^2 = 11, \\ b^2 + bc + c^2 = 11. \end{cases}$$

(а) *(1 балл)* Какое наименьшее значение может принимать выражение $c^2 + ca + a^2$?

(б) *(3 балла)* Какое наибольшее значение может принимать выражение $c^2 + ca + a^2$?

Ответ: **(а)** 0; **(б)** 44.

Вариант 11.8.2. Действительные числа a, b, c таковы, что

$$\begin{cases} a^2 + ab + b^2 = 13, \\ b^2 + bc + c^2 = 13. \end{cases}$$

(а) *(1 балл)* Какое наименьшее значение может принимать выражение $c^2 + ca + a^2$?

(б) *(3 балла)* Какое наибольшее значение может принимать выражение $c^2 + ca + a^2$?

Ответ: **(а)** 0; **(б)** 52.

Вариант 11.8.3. Действительные числа a, b, c таковы, что

$$\begin{cases} a^2 + ab + b^2 = 17, \\ b^2 + bc + c^2 = 17. \end{cases}$$

(а) *(1 балл)* Какое наименьшее значение может принимать выражение $c^2 + ca + a^2$?
(б) *(3 балла)* Какое наибольшее значение может принимать выражение $c^2 + ca + a^2$?

Ответ: **(а)** 0; **(б)** 68.

Вариант 11.8.4. Действительные числа a, b, c таковы, что

$$\begin{cases} a^2 + ab + b^2 = 19, \\ b^2 + bc + c^2 = 19. \end{cases}$$

(а) *(1 балл)* Какое наименьшее значение может принимать выражение $c^2 + ca + a^2$?
(б) *(3 балла)* Какое наибольшее значение может принимать выражение $c^2 + ca + a^2$?

Ответ: **(а)** 0; **(б)** 76.