Материалы для проведения регионального этапа

50-й ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2023–2024 учебный год

Первый день

31 января – 1 февраля 2024 г.

Москва, 2024

Сборник содержит материалы для проведения III этапа 50-й Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, П. А. Кожевников, А. С. Кузнецов, Е. Г. Молчанов, О. К. Подлипский, К. А. Сухов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов.

А также: М. А. Дидин, В. Б. Мокин, П. Ю. Козлов, А. Д. Терёшин, Д. А. Терёшин, Г. Р. Челноков, Л. М. Шатунов.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Рецензент: д.ф.-м.н. Р. Н. Карасёв.

Компьютерный макет: И. И. Богданов, А. И. Голованов.

Введение

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2023–2024 учебного года.

Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике 2023–2024 учебного года проводится по заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в единые для всех субъектов РФ сроки: **31 января 2024 г.** (I тур) и **1 февраля 2024 г.** (II тур). Региональный этап проводится по отдельным заданиям для учащихся 9, 10 и 11 классов.

Задания для каждого класса включают 10 задач — по 5 задач в каждом из двух дней (туров) Олимпиады (задачи 1–5 — I тур, задачи 6–10 — II тур). Продолжительность каждого тура для каждого класса составляет 3 часа 55 минут.

В силу того, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным Центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников Олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала и окончания туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с **«Временны́ми регламентами проведения туров регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников в субъектах Российской Федерации в 2023–2024 учебном году»** для часовых поясов.

Разбор задач в субъектах Российской Федерации, где тур оканчивается в 16.00 и 17.00 по местному времени, проводится не раньше, чем на следующий день после проведения второго тура Олимпиады.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 70 (35 — I тур, 35 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т. п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Проверка работ осуществляется в соответствии со следующими правилами:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках;

б) недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) черновики не проверяются.

В связи с необходимостью качественной оценки работ участников, на их проверку выделяется до 7 дней.

Для единообразия оценки работ участников олимпиады из разных регионов и с целью исключения при этом ошибок, Центральная предметно-методическая комиссия имеет право перепроверки работ участников регионального этапа.

В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице (отметим, что для исключения различий в оценке близких продвижений по задаче в работах разных участников, таблица упрощена по сравнению с приведённой в Требованиях по проведению регионального этапа).

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение.
5–7	Верное решение. Имеются недочёты, в целом не влияющие на решение.
1–4	Задача не решена, но в работе имеются существенные продвижения.
0	Аналитическое решение (координатным, векторным, тригонометрическим методом) геометрической задачи, не доведённое до конца.
0	Рассмотрение частного случая, не дающее продвижений в решении в общем случае.
0	Верное решение отсутствует, существенных продвижений нет.

Ниже приведены ответы и решения к задачам олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения и ошибки, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.1. У Олега есть набор из 2024 различных клетчатых прямоугольников размеров 1×1, 1×2, 1×3, $\ldots$, 1×2024 (по одному прямоугольнику каждого размера). Может ли он, выбрав некоторые из них, составить какой-нибудь клетчатый квадрат площади больше 1? (*О. Подлипский*)

Ответ. Не может.

Решение. Предположим противное, и пусть $n > 1$ — наибольшая из длин выбранных прямоугольников. Тогда составлен клетчатый квадрат $k \times k$, где $k \geqslant n > 1$. Значит, его площадь не менее n^2. С другой стороны, его площадь не больше, чем суммарная площадь всех прямоугольников 1×1, 1×2, 1×3, $\ldots$, $1 \times n$, т.е. не больше $1 + 2 + 3 + \ldots + n < n^2$. Противоречие.

Замечание. Расположив в квадрате $n \times n$ прямоугольники 1×1, 1×2, 1×3, $\ldots$, $1 \times n$ «лесенкой» можно увидеть без вычислений, что их суммарная площадь меньше площади всего квадрата.

Комментарий. Только ответ «не может» — 0 баллов.

Только идея рассмотреть самый длинный из использованных прямоугольников (длины n) — 1 балл.

Есть идея рассмотреть самый длинный прямоугольник, и замечено, что площадь, покрытая остальными использованными прямоугольниками, должна быть не меньше, чем $n(n-1)$ (или эквивалентное утверждение, например, что площадь всего квадрата должна быть не меньше, чем n^2), без дальнейшего содержательного продвижения — 3 балла.

Есть идея рассмотреть самый длинный прямоугольник, и замечено, что суммарная площадь всех использованных прямоугольников не превосходит $n(n+1)/2$, без дальнейшего содержательного продвижения — 3 балла.

Есть идея рассмотреть самый длинный прямоугольник, и явно сказано, что суммарная площадь всех использованных прямоугольников меньше n^2 — не менее 6 баллов.

Баллы, перечисленные выше, не суммируются друг с другом.

Если во в целом верном решении рассмотрен лишь случай квадрата со стороной n (а не больше) — снимается 1 балл.

9.2. На координатной плоскости нарисована парабола $y = x^2$. Для данного числа $k > 0$ рассматриваются трапеции, вписанные в эту параболу (то есть все вершины трапеции лежат на параболе), у которых основания параллельны оси абсцисс, а произведение длин оснований равно k. Докажите, что диагонали всех таких трапеций проходят через одну точку. (*Н. Агаханов*)

Решение. Пусть $ABCD$ — одна из рассматриваемых трапеций, $AD \parallel BC \parallel Ox$ (см. рис. 1). Пусть точки A и C имеют координаты (a, a^2) и (c, c^2).

Легко получить уравнение прямой AC: $(c^2-a^2)x-(c-a)y+(ca^2-ac^2) = 0$, что после сокращения на $c - a \neq 0$ превращается в $y = (a+c)x-ac$. Но $-ac$ равно произведению половин оснований трапеции (это произведение расстояний от A и C до оси Oy). Отсюда $-ac = \frac{k^2}{4}$. Следовательно, прямая AC проходит через фиксированную точку $(0, \frac{k^2}{4})$.

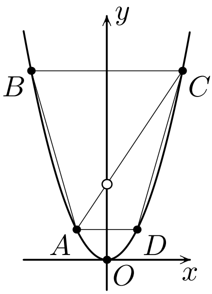

Рис. 1

Замечание. Конечно, утверждение задачи верно для любой параболы (а не только для $y = x^2$).

Комментарий. Верно указана общая точка диагоналей, но не доказано, что через нее они в самом деле проходят — 2 балла.

Задача решена при рассмотрении только одного из двух аналогичных случаев расположения точек (скажем, $a > 0$ разобран, а $a < 0$ — нет) — баллы не снимаются.

Ошибка в арифметике, не повлиявшая на ход решения — снимаются 2 балла.

9.3. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Для игры в настольный теннис навылет всех жителей острова разделили на две команды A и B, причём в A жителей было больше, чем в B. Начали игру два игрока разных команд; после каждой партии проигравший игрок навсегда выходил из игры, и его заменял другой (ещё не игравший) член его команды. Проиграла команда, все члены которой вышли из игры. После турнира каждого члена команды A спросили: «Правда ли, что в какой-то игре ты проиграл лжецу?», а каждого члена команды B спросили: «Правда ли, что ты выиграл хотя бы у двух рыцарей?». Все ответы оказались утвердительными. Какая команда победила — A или B? (*М. Дидин*)

Ответ. Победила A.

Решение. Пусть в B есть хотя бы один рыцарь r. Тогда r выиграл хотя бы у двоих рыцарей из A, пусть s — один из них. Поскольку s — рыцарь, он правдиво ответил на заданный ему вопрос, то есть он проиграл лжецу. Но из правил следует, что каждый игрок проигрывает не более одного раза, а s проиграл и рыцарю r, и лжецу. Это противоречие показывает, что B состоит лишь из лжецов.

Предположим, что A состоит только из рыцарей. В этом случае каждый из них проиграл какому-то лжецу из команды B, однако каждый лжец в B выиграл не более, чем у одного рыцаря из A, так как он солгал, отвечая на вопрос. Следовательно, разным рыцарям из A соответствуют разные лжецы из B, поэтому в B людей не меньше, чем в A; противоречие.

Таким образом, в команде A есть хотя бы один лжец; обозначим одного из них через ℓ. Тогда ℓ солгал, то есть он не проиграл ни одному лжецу из B — а значит, ни одному игроку из B. Это значит, что ℓ либо выиграл все свои партии, либо до него не дошла очередь. В любом из этих случаев команда A выиграла.

Комментарий. Верное доказательство того, что B состоит из лжецов — 2 балла.

Верное доказательство того, что в A есть хотя бы один лжец — 2 балла.

Указанные баллы суммируются.

9.4. В ряд выписаны по одному разу все натуральные числа от 1 до 1000 в каком-то порядке. Докажите, что можно выбрать несколько стоящих подряд выписанных чисел, сумма которых больше 100000, но не превосходит 100500. (*С. Берлов*)

Решение. Сумма всех чисел ряда, кроме числа 500, равна $(1 + 2 + 3 + \ldots + 1000) - 500 > 2 \cdot 100000$, поэтому сумма чисел с какой-то из сторон от числа 500 больше 100000, пусть для определённости справа.

Пусть справа от 500 стоят (слева направо) числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Обозначим $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$; выберем наименьшее n, для которого $S_n > 100000$, так что $S_n > 100000 \geqslant \geqslant S_{n-1}$. Если $S_n \leqslant 100500$, то мы уже нашли желаемую группу чисел.

Пусть теперь $S_n > 100500$. Докажем, что тогда нам подходит сумма $500 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} = 500 + S_{n-1}$. Действительно, поскольку $a_n \leqslant 1000$, имеем $500 + S_{n-1} = 500 + + S_n - a_n > 500 + 100500 - 1000 = 100000$. С другой стороны, $500 + S_{n-1} \leqslant 500 + 100000 = 100500$, что и требовалось.

Комментарий. Алгоритм выбора нужного отрезка чисел, который не работает хотя бы для одной перестановки чисел от 1 до 1000, признается не работающим и оценивается в 0 баллов.

В случае верного алгоритма выбора нужного отрезка оценка может быть снижена на 1, 2 или 3 балла, за пробелы в обосновании того, что алгоритм действительно работающий.

9.5. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$). На продолжениях боковых сторон AB и BC за точку B отмечены точки D и E соответственно, а на основании AC отмечена точка F, причем $AC = DE$ и $\angle CFE = \angle DEF$. Докажите, что $\angle ABC = 2\angle DFE$. (*А. Кузнецов*)

Первое решение. Обозначим через O середину дуги DBE окружности, описанной около треугольника DBE. Прямая BO является внешней биссектрисой в треугольнике DBE, а следовательно, и в треугольнике ABC. Но треугольник ABC равнобедренный, поэтому $BO \parallel AC$.

Заметим далее, что $\angle EOD = \angle EBD = \angle ABC$ (см. рис. 2). Таким образом, в равнобедренных треугольниках EOD и ABC равны углы при вершинах, а также основания, поэтому равны и сами треугольники. Отсюда, во-первых, $BA = BC = OE = = OD$. Во-вторых, расстояние от точки O до прямой DE равно расстоянию от точки B до AC, а последнее равно расстоянию от O до AC (поскольку $BO \parallel AC$). Значит, точка O лежит на биссектрисе угла между прямыми DE и AC.

Из условия $\angle DEF = \angle CFE$ вытекает, что эта биссектриса является серединными перпендикуляром к отрезку EF. Таким образом, $OF = OE = OD$. Иными словами, точка O — центр окружности, описанной около треугольника DFE. Следовательно, $2\angle DFE = \angle DOE = \angle ABC$, что и требовалось.

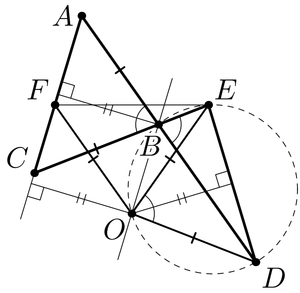

Рис. 2

Второе решение. Для начала сделаем замечание. Пусть на прямой AC выбраны точки A' и C' такие, что $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC}$ и $\angle DA'C' = \angle EC'A'$; тогда $A' = A$ и $C' = C$. Действительно, если это не так и, скажем, точки A' и C' лежит на луче CA (см. рис. 3), то $\angle DA'C' < \angle DAC = \angle ECA < \angle EC'A'$, что невозможно.

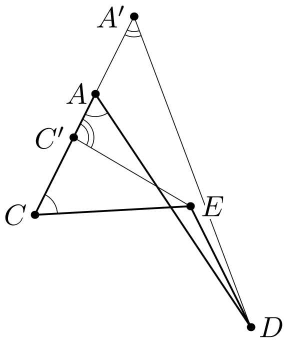

Рис. 3

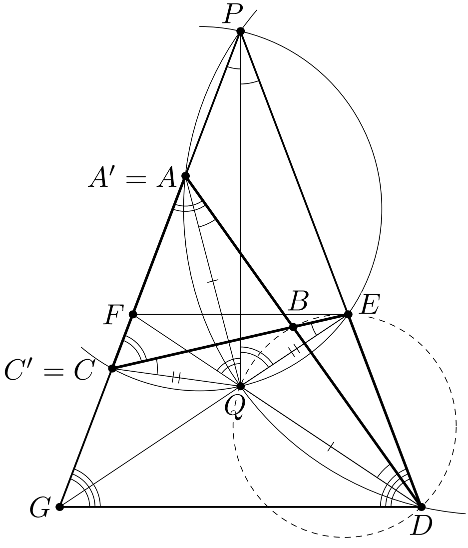

Рис. 4

Построим теперь такие точки. Пусть прямые DE и AC пересекаются в точке P; для определённости, пусть P лежит на луче DE. Выберем на прямой AC точку G такую, что $EF \parallel DG$. Тогда $DEFG$ — трапеция с равными углами при основании; следовательно, $FG = DE = AC$ и $DF = EG$. Пусть диагонали

DF и EG пересекаются в точке Q. Пусть, наконец, описанные окружности треугольников PDQ и PEQ вторично пересекают прямую AC в точках A' и C' соответственно (см. рис. 4).

Поскольку PQ — биссектриса угла APD, получаем $QA' = QD$ и $QC' = QE$. Кроме того, $\angle DQA' = 180^\circ - \angle DPG = \angle EQC'$. Значит, $\angle DQE = \angle A'QC'$; поэтому треугольник $A'QC'$ получается из DQE поворотом вокруг точки Q. Отсюда нетрудно получить, что $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC}$. Далее, из вписанности и симметрии имеем

$$\angle EC'P = \angle EQP = \angle FQP = 180^\circ - \angle DQP = \angle DA'C'.$$

По замечанию выше получаем, что $A = A'$ и $C = C'$.

Осталось завершить решение. Имеем $\angle ADQ = \angle APQ = \angle CEQ$. Отсюда следует, что точки D, E, B и Q лежат на одной окружности. Значит, $\angle ABC = \angle DBE = \angle DQE = \angle QEF + \angle QFE = 2\angle DFE$, что и требовалось доказать.

Замечание. Если $DE \parallel AC$, то точка F совпадает с A, что невозможно. Поэтому можно считать, что прямые DE и AC пересекаются. Кроме того, можно показать, что в условиях задачи P всегда лежит именно на луче DE.

Третье решение. Как и в предыдущем решении, достроим равнобокую трапецию $DEFG$ с точкой пересечения диагоналей Q. Как мы видели в том же решении, достаточно доказать, что точки D, E, B и Q лежат на одной окружности.

Выберем точку T так, что четырёхугольник $ACTD$ — параллелограмм (см. рис. 5). Тогда $FGTD$ — также параллелограмм, ибо $\overrightarrow{DT} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{FG}$. Значит, $GT = FD = GE$ и $\angle TCA = 180^\circ - \angle DAC = 180^\circ - \angle ECA$; первое равенство означает, что G лежит на серединном перпендикуляре к ET, а второе — что CG это внешняя биссектриса угла ECT. Но, как известно, эта внешняя биссектриса вторично пересекает описанную окружность треугольника ECT в точке, лежащей на серединном перпендикуляре к ET; значит, G и есть эта точка, и точки C, G, T, E лежат на одной окружности.

Наконец, из этой окружности и двух параллелограммов получаем $\angle BDQ = \angle ADF = \angle CTG = \angle CEG = \angle BEQ$, то есть точки D, E, B и Q лежат на одной окружности; это мы и хотели доказать.

Комментарий. Общие замечания. В этой задаче рекомендуется не снижать баллы за использование расположения точек, не влияющее существенно на ход решения — например, на расположение точки P пересечения прямых DE и AC, отсутствие разбора случая $DE \parallel AC$ и т. п.

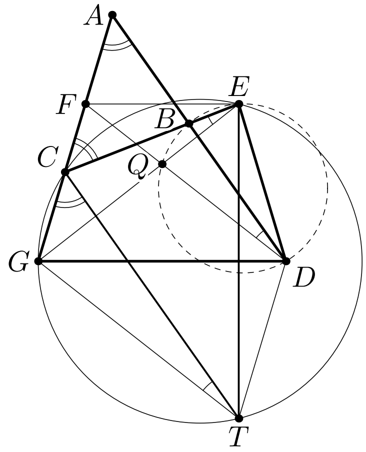

Рис. 5

Далее приведены критерии оценивания для работ, следующих по одному из предложенных решений. Остальные решения стоит оценивать по аналогии. Баллы по разным решениям не складываются друг с другом. Баллы в рамках одного решения могут складываться только если это указано явно.

Первое решение.

(1.1) Только построена точка O — 0 баллов.

(1.2) Показано, что треугольники ABC и DOE равны — 1 балл.

(1.3) Показано, что O равноудалена от прямых AC и DE — 3 балла.

(1.4) Доказано, что $OE = OF$ — 4 балла.

Второе решение.

(2.1) Только построена точка Q — 0 баллов.

(2.2) Задача сведена к доказательству того, что точки D, E, B, Q лежат на одной окружности — 1 балл.

(2.3) Высказано предположение, что треугольники AQC и DQE равны — 1 балл (может суммироваться с (2.2)).

(2.4) Из этого предположения выведено утверждение задачи — 2 балла (**не** суммируется с (2.2)).

(2.5) Только доказано, что треугольники AQC и DQE равны — 4 балла.

Третье решение.

(3.1) Только построена точка Q — 0 баллов.

(3.2) Задача сведена к доказательству того, что точки D, E, B, Q лежат на одной окружности — 1 балл.

(3.3) Построена точка T из решения, и задача сведена к доказательству того, что точки C, G, E, T лежат на одной окружности — 3 балла.

10 класс

10.1. У Олега есть набор из 2024 различных клетчатых прямоугольников размеров 1×1, 1×2, 1×3, $\ldots$, 1×2024 (по одному прямоугольнику каждого размера). Может ли он, выбрав некоторые из них, составить какой-нибудь клетчатый квадрат площади больше 1? (*О. Подлипский*)

Ответ. Не может.

Решение. Предположим противное, и пусть $n > 1$ — наибольшая из длин выбранных прямоугольников. Тогда составлен клетчатый квадрат $k \times k$, где $k \geqslant n > 1$. Значит, его площадь не менее n^2. С другой стороны, его площадь не больше, чем суммарная площадь всех прямоугольников 1×1, 1×2, 1×3, $\ldots$, $1 \times n$, т.е. не больше $1 + 2 + 3 + \ldots + n < n^2$. Противоречие.

Замечание. Расположив в квадрате $n \times n$ прямоугольники 1×1, 1×2, 1×3, $\ldots$, $1 \times n$ «лесенкой» можно увидеть без вычислений, что их суммарная площадь меньше площади всего квадрата.

Комментарий. Только ответ «не может» — 0 баллов.

Только идея рассмотреть самый длинный из использованных прямоугольников (длины n) — 1 балл.

Есть идея рассмотреть самый длинный прямоугольник, и замечено, что площадь, покрытая остальными использованными прямоугольниками, должна быть не меньше, чем $n(n-1)$ (или эквивалентное утверждение, например, что площадь всего квадрата должна быть не меньше, чем n^2), без дальнейшего содержательного продвижения — 3 балла.

Есть идея рассмотреть самый длинный прямоугольник, и замечено, что суммарная площадь всех использованных прямоугольников не превосходит $n(n+1)/2$, без дальнейшего содержательного продвижения — 3 балла.

Есть идея рассмотреть самый длинный прямоугольник, и явно сказано, что суммарная площадь всех использованных прямоугольников меньше n^2 — не менее 6 баллов.

Баллы, перечисленные выше, не суммируются друг с другом.

Если во в целом верном решении рассмотрен лишь случай квадрата со стороной n (а не больше) — снимается 1 балл.

10.2. На координатной плоскости нарисована парабола $y = x^2$. Для данного числа $k > 0$ рассматриваются трапеции, вписанные в эту параболу (то есть все вершины трапеции лежат на параболе), у которых основания параллельны оси абсцисс, а произведение длин оснований равно k. Докажите, что продолжения боковых сторон всех таких трапеций проходят через одну точку.

(*Н. Агаханов*)

Решение. Пусть $ABCD$ — одна из рассматриваемых трапеций, $AD \parallel BC \parallel Ox$ (см. рис. 6). Пусть точки A и B имеют координаты (a, a^2) и (b, b^2).

Легко получить уравнение прямой AB: $(b^2-a^2)x-(b-a)y+(ba^2-ab^2) = 0$, что после сокращения на $b - a \neq 0$ превращается в $y = (a + b)x - ab$. Но ab равно произведению половин оснований трапеции (это произведение расстояний от A и B до оси Oy). Отсюда $ab = \frac{k^2}{4}$. Следовательно, прямая AB проходит через фиксированную точку $(0, -\frac{k^2}{4})$.

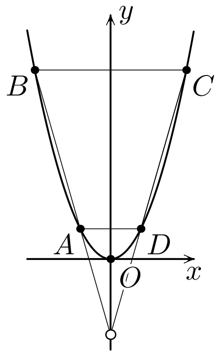

Рис. 6

Замечание. Конечно, утверждение задачи верно для любой параболы (а не только для $y = x^2$).

Комментарий. Верно указана общая точка продолжений боковых сторон, но не доказано, что через нее они в самом деле проходят — 2 балла.

Задача решена при рассмотрении только одного из двух аналогичных случаев расположения точек (скажем, $a > 0$ разобран, а $a < 0$ — нет) — баллы не снимаются.

Ошибка в арифметике, не повлиявшая на ход решения — снимаются 2 балла.

10.3. По кругу стоят 100 белых точек. Аня и Боря красят по очереди по одной ещё не покрашенной точке в красный или синий цвет, начинает Аня. Аня хочет, чтобы в итоге оказалось как можно больше пар разноцветных соседних точек, а Боря — чтобы оказалось как можно меньше таких пар. Какое наибольшее число пар разноцветных соседних точек Аня может гарантировать себе независимо от игры Бори? (*П. Кожевников*)

Ответ. 50.

Решение. Нужно показать, что Аня всегда может добиться, чтобы разноцветных пар было не меньше 50, а Боря сможет помешать ей добиться, чтобы таких пар было больше 50.

Первый способ. *Стратегия Ани.* Первым ходом Аня красит в любой цвет любую точку, а дальше каждым ходом выбирает пару из непокрашенной точки и стоящей рядом с ней покрашенной (такая, очевидно, найдётся), и красит непокрашенную точку в цвет, отличный от цвета покрашенной. При этом образуется новая пара соседних разноцветных точек.

Стратегия Бори. Каждым ходом Боря выбирает пару из непокрашенной точки и стоящей рядом с ней покрашенной, и красит непокрашенную точку в цвет, совпадающий с цветом покрашенной. При этом образуется новая пара соседних одноцветных точек.

Обоснование правильности стратегий. Всего в круге имеется 100 пар соседних точек, и каждый игрок делает за игру по 50 ходов. Сделав свои ходы, Боря добьется того, что из этих 100 пар хотя бы 50 будут одноцветными, а Аня — что хотя бы 49 из них будут разноцветными. Однако заметим, что количество разноцветных пар всегда чётно. Действительно, после окончания игры пройдём полный круг, начиная с какой-то отмеченной точки (пусть для определённости с красной). Группы из идущих подряд красных и синих точек при этом будут чередоваться: К—С—К—С—…—К, и значит, встретим пар разноцветных соседей вида К—С столько же, сколько пар вида С—К. Поэтому если пар разноцветных соседних точек не меньше 49, то их хотя бы 50.

Второй способ. Разобьём все отмеченные точки на 50 пар соседей: $P_1, P_2, \ldots, P_{50}$.

Стратегия Бори. Если своим ходом Аня красит точку в паре P_i, то Боря ответным ходом красит вторую точку в паре P_i в тот же цвет. Ясно, что при такой игре Бори в конце игры каждая пара P_i будет покрашена в один цвет. Значит, из 100 пар соседних точек не менее 50 будут одноцветными. Поэтому разноцветных пар будет не больше, чем $100 - 50 = 50$.

Стратегия Ани. Аня будет добиваться того, чтобы в каждой паре P_i с нечётным номером i она покрасила одну из точек красным, а в каждой паре P_i с чётным номером i — синим. Если у Ани это получится, то покрашенные ею 50 точек разобьют окружность на 50 дуг с разноцветными концами. На каждой из этих дуг, очевидно, найдётся хотя бы одна пара разноцветных соседних отмеченных точек (в частности, если на дуге нет отмеченных Борей точек, такую пару образуют концы дуги).

Покажем, как Аня может реализовать этот план. Первым ходом она красит одну из точек в какой-то паре P_i соответствующим цветом. Далее, если Боря отвечает ходом в ту же пару, то Аня красит одну из точек в любой ещё не покрашенной паре, иначе она красит вторую точку в паре, в которой только что покрасил точку Боря. В результате после каждого хода Ани будет ровно одна пара P_j, в которой одна точка покрашена Аней, а другая не покрашена, а в каждой из остальных пар P_i будет либо две покрашенных точки, ровно одна из которых покрашена Аней, либо ни одной покрашенной точки. Значит, в конце игры Аней будет покрашено ровно по одной точке в каждой паре P_i, что ей и требовалось.

Комментарий.

Только ответ — 0 баллов.

1) Предъявлена верная стратегия за Борю, гарантирующая, что число разноцветных пар не больше 50 — 2 балла.

1') Обосновано, что эта Борина стратегия работает — 1 балл.

2) Предъявлена верная стратегия за Аню, гарантирующая, что число разноцветных пар не меньше 50 — 2 балла.

2') Обосновано, что эта Анина стратегия работает — 2 балла (если при верной Аниной стратегии обосновано лишь, что она может обеспечить себе 49 пар, то считается, что обоснование отсутствует, и эти баллы не ставятся).

Баллы за указанные продвижения суммируются. Если предъявленная стратегия за одного из игроков не работает хотя бы в одном частном случае развития игры, такая стратегия признается не работающей и оценивается в 0 баллов.

10.4. В ряд выписаны по одному разу все натуральные числа от 1 до 1000 в каком-то порядке. Докажите, что можно выбрать несколько стоящих подряд выписанных чисел, сумма которых больше 100000, но не превосходит 100500. (*С. Берлов*)

Решение. Сумма всех чисел ряда, кроме числа 500, равна $(1 + 2 + 3 + \ldots + 1000) - 500 > 2 \cdot 100000$, поэтому сумма чисел с какой-то из сторон от числа 500 больше 100000, пусть для определённости справа.

Пусть справа от 500 стоят (слева направо) числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Обозначим $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$; выберем наименьшее n, для которого $S_n > 100000$, так что $S_n > 100000 \geqslant \geqslant S_{n-1}$. Если $S_n \leqslant 100500$, то мы уже нашли желаемую группу чисел.

Пусть теперь $S_n > 100500$. Докажем, что тогда нам подходит сумма $500 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} = 500 + S_{n-1}$. Действительно, поскольку $a_n \leqslant 1000$, имеем $500 + S_{n-1} = 500 + + S_n - a_n > 500 + 100500 - 1000 = 100000$. С другой стороны, $500 + S_{n-1} \leqslant 500 + 100000 = 100500$, что и требовалось.

Комментарий. Алгоритм выбора нужного отрезка чисел, который не работает хотя бы для одной перестановки чисел от 1 до 1000, признается не работающим и оценивается в 0 баллов.

В случае верного алгоритма выбора нужного отрезка оценка может быть снижена на 1, 2 или 3 балла, за пробелы в обосновании того, что алгоритм действительно работающий.

10.5. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярны и пересекаются в точке O. Центры вписанных окружностей треугольников ABC, BCD, CDA, DAB являются вершинами выпуклого четырёхугольника, периметр которого равен P. Докажите, что сумма радиусов вписанных окружностей треугольников AOB, BOC, COD, DOA не превосходит $\frac{P}{2}$.

(*С. Берлов*)

Решение. В прямоугольном треугольнике AOB радиус вписанной окружности равен $\frac{1}{2}(OA + OB - AB)$ (что также равно расстоянию от вершины прямого угла до точки касания катета со вписанной окружностью). Складывая это равенство с аналогичными для треугольников BOC, COD, DOA, получаем, что сумма S радиусов вписанных окружностей треугольников AOB, BOC, COD, DOA равна

$$\frac{1}{2}\left(2(OA+OB+OC+OD)-P_{ABCD}\right)=AC+BD-\frac{P_{ABCD}}{2}\,.$$

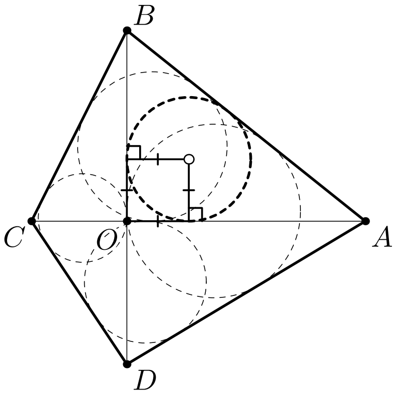

Рис. 7

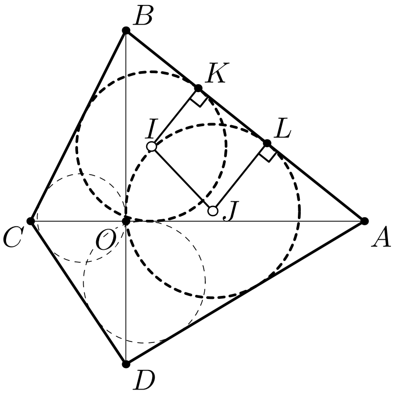

Рис. 8

Пусть вписанные окружности треугольников ABC и DAB имеют центры I, J и касаются стороны AB в точках K и L соответственно. Поскольку KL — проекция IJ на прямую AB, имеем $IJ \geqslant KL = AK - AL = \frac{1}{2}(AC+AB-BC) - \frac{1}{2}(AD+AB-BD) = \frac{1}{2}(AC+BD-BC-AD)$. Сложим это неравенство с аналогичными для расстояний между другими парами центров вписанных окружностей треугольников ABC, BCD, CDA, DAB. Получим оценку на периметр P: $P \geqslant \frac{1}{2}(4AC+4BD-2P_{ABCD})$. Сравнивая с выражением S, получаем требуемое неравенство $P \geqslant 2S$.

Замечание. Неравенство может обращаться в равенство (например, в случае прямоугольника $ABCD$). Из решения видно, что это происходит в том случае, когда $IJ \parallel AB$ и выполнены аналогичные параллельности линии центров вписанных окружностей и сторон четырёхугольника $ABCD$.

Комментарий. Получено выражение для суммы радиусов S через диагонали и стороны исходного четырехугольника — 1 балл.

Идея оценить расстояние IJ проекцией на сторону AB — 1 балл.

Баллы за указанные продвижения суммируются.

За отсутствие обоснования того, что в выпуклом четырехугольнике, образованном центрами вписанных окружностей треугольников ABC, BCD, CDA, DAB, вершины идут в перечисленном порядке, баллы не снимаются.

11 класс

11.1. У Олега есть набор из 2024 различных клетчатых прямоугольников размеров 1×1, 1×2, 1×3, $\ldots$, 1×2024 (по одному прямоугольнику каждого размера). Может ли он, выбрав некоторые из них, составить какой-нибудь клетчатый квадрат площади больше 1? (*О. Подлипский*)

Ответ. Не может.

Решение. Предположим противное, и пусть $n > 1$ — наибольшая из длин выбранных прямоугольников. Тогда составлен клетчатый квадрат $k \times k$, где $k \geqslant n > 1$. Значит, его площадь не менее n^2. С другой стороны, его площадь не больше, чем суммарная площадь всех прямоугольников 1×1, 1×2, 1×3, $\ldots$, $1 \times n$, т.е. не больше $1 + 2 + 3 + \ldots + n < n^2$. Противоречие.

Замечание. Расположив в квадрате $n \times n$ прямоугольники 1×1, 1×2, 1×3, $\ldots$, $1 \times n$ «лесенкой» можно увидеть без вычислений, что их суммарная площадь меньше площади всего квадрата.

Комментарий. Только ответ «не может» — 0 баллов.

Только идея рассмотреть самый длинный из использованных прямоугольников (длины n) — 1 балл.

Есть идея рассмотреть самый длинный прямоугольник, и замечено, что площадь, покрытая остальными использованными прямоугольниками, должна быть не меньше, чем $n(n-1)$ (или эквивалентное утверждение, например, что площадь всего квадрата должна быть не меньше, чем n^2), без дальнейшего содержательного продвижения — 3 балла.

Есть идея рассмотреть самый длинный прямоугольник, и замечено, что суммарная площадь всех использованных прямоугольников не превосходит $n(n+1)/2$, без дальнейшего содержательного продвижения — 3 балла.

Есть идея рассмотреть самый длинный прямоугольник, и явно сказано, что суммарная площадь всех использованных прямоугольников меньше n^2 — не менее 6 баллов.

Баллы, перечисленные выше, не суммируются друг с другом.

Если во в целом верном решении рассмотрен лишь случай квадрата со стороной n (а не больше) — снимается 1 балл.

11.2. Пусть $x_1 < x_2 < \ldots < x_{2024}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел. При $i = 1, 2, \ldots, 2024$ обозначим $p_i = (x_1 - \frac{1}{x_1})(x_2 - \frac{1}{x_2}) \ldots (x_i - \frac{1}{x_i})$. Какое наибольшее количество натуральных чисел может содержаться среди чисел $p_1, p_2, \ldots, p_{2024}$? (*Н. Агаханов*)

Ответ. 2023.

Первое решение. Заметим, что число $p_1 = x_1 - \frac{1}{x_1}$ не может быть натуральным. Действительно, если $x_1 = 1$, то $p_1 = 0$, если же $x_1 > 1$, то p_1 — не целое, как разность целого и нецелого чисел. Поэтому натуральными могут быть не более 2023 чисел p_i.

Покажем, как получить 2023 натуральных числа. Если $x_1 = 2, x_2 = 3$, то $p_2 = (x_1 - \frac{1}{x_1})(x_2 - \frac{1}{x_2}) = (2 - \frac{1}{2})(3 - \frac{1}{3}) = 4$. При $n > 2$ положим $x_{n+1} = p_n > x_n$. Тогда $p_{n+1} = p_n(x_{n+1} - \frac{1}{x_{n+1}}) = p_n^2 - 1$ также будет натуральным.

Второе решение. Приведем другой пример последовательности, дающий 2023 натуральных числа. Положим $x_1 = 2, x_2 = 3, \ldots, x_{2024} = 2025$. Тогда $x_k - \frac{1}{x_k} = k + 1 - \frac{1}{k+1} = \frac{k(k+2)}{k+1}$. Тогда $p_i = \frac{1 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{i(i+2)}{i+1} = i!(i+2)/2$, что является натуральным числом при $i \geqslant 2$.

Замечание. Подходят любые 2024 последовательных натуральных числа, больших 1.

Комментарий. Ответ без обоснования — 0 баллов.

Только оценка — 1 балл.

Только пример — 6 баллов.

Приведён верный пример последовательности, но не обосновано, что она подходит — не более 5 баллов.

11.3. По кругу стоят 100 белых точек. Аня и Боря красят по очереди по одной ещё не покрашенной точке в красный или синий цвет, начинает Аня. Аня хочет, чтобы в итоге оказалось как можно больше пар разноцветных соседних точек, а Боря — чтобы оказалось как можно меньше таких пар. Какое наибольшее число пар разноцветных соседних точек Аня может гарантировать себе независимо от игры Бори? (*П. Кожевников*)

Ответ. 50.

Решение. Нужно показать, что Аня всегда может добиться, чтобы разноцветных пар было не меньше 50, а Боря сможет помешать ей добиться, чтобы таких пар было больше 50.

Первый способ. *Стратегия Ани.* Первым ходом Аня красит в любой цвет любую точку, а дальше каждым ходом выбирает пару из непокрашенной точки и стоящей рядом с ней покрашенной (такая, очевидно, найдётся), и красит непокрашенную точку в цвет, отличный от цвета покрашенной. При этом образуется новая пара соседних разноцветных точек.

Стратегия Бори. Каждым ходом Боря выбирает пару из непокрашенной точки и стоящей рядом с ней покрашенной, и красит непокрашенную точку в цвет, совпадающий с цветом покрашенной. При этом образуется новая пара соседних одноцветных точек.

Обоснование правильности стратегий. Всего в круге имеется 100 пар соседних точек, и каждый игрок делает за игру по 50 ходов. Сделав свои ходы, Боря добьется того, что из этих 100 пар хотя бы 50 будут одноцветными, а Аня — что хотя бы 49 из них будут разноцветными. Однако заметим, что количество разноцветных пар всегда чётно. Действительно, после окончания игры пройдём полный круг, начиная с какой-то отмеченной точки (пусть для определённости с красной). Группы из идущих подряд красных и синих точек при этом будут чередоваться: К—С—К—С—…—К, и значит, встретим пар разноцветных соседей вида К—С столько же, сколько пар вида С—К. Поэтому если пар разноцветных соседних точек не меньше 49, то их хотя бы 50.

Второй способ. Разобьём все отмеченные точки на 50 пар соседей: $P_1, P_2, \ldots, P_{50}$.

Стратегия Бори. Если своим ходом Аня красит точку в паре P_i, то Боря ответным ходом красит вторую точку в паре P_i в тот же цвет. Ясно, что при такой игре Бори в конце игры каждая пара P_i будет покрашена в один цвет. Значит, из 100 пар соседних точек не менее 50 будут одноцветными. Поэтому разноцветных пар будет не больше, чем $100 - 50 = 50$.

Стратегия Ани. Аня будет добиваться того, чтобы в каждой паре P_i с нечётным номером i она покрасила одну из точек красным, а в каждой паре P_i с чётным номером i — синим. Если у Ани это получится, то покрашенные ею 50 точек разобьют окружность на 50 дуг с разноцветными концами. На каждой из этих дуг, очевидно, найдётся хотя бы одна пара разноцветных соседних отмеченных точек (в частности, если на дуге нет отмеченных Борей точек, такую пару образуют концы дуги).

Покажем, как Аня может реализовать этот план. Первым ходом она красит одну из точек в какой-то паре P_i соответствующим цветом. Далее, если Боря отвечает ходом в ту же пару, то Аня красит одну из точек в любой ещё не покрашенной паре, иначе она красит вторую точку в паре, в которой только что покрасил точку Боря. В результате после каждого хода Ани будет ровно одна пара P_j, в которой одна точка покрашена Аней, а другая не покрашена, а в каждой из остальных пар P_i будет либо две покрашенных точки, ровно одна из которых покрашена Аней, либо ни одной покрашенной точки. Значит, в конце игры Аней будет покрашено ровно по одной точке в каждой паре P_i, что ей и требовалось.

Комментарий.

Только ответ — 0 баллов.

1) Предъявлена верная стратегия за Борю, гарантирующая, что число разноцветных пар не больше 50 — 2 балла.

1') Обосновано, что эта Борина стратегия работает — 1 балл.

2) Предъявлена верная стратегия за Аню, гарантирующая, что число разноцветных пар не меньше 50 — 2 балла.

2') Обосновано, что эта Анина стратегия работает — 2 балла (если при верной Аниной стратегии обосновано лишь, что она может обеспечить себе 49 пар, то считается, что обоснование отсутствует, и эти баллы не ставятся).

Баллы за указанные продвижения суммируются. Если предъявленная стратегия за одного из игроков не работает хотя бы в одном частном случае развития игры, такая стратегия признается не работающей и оценивается в 0 баллов.

11.4. На отрезке XY как на диаметре построена полуокружность и выбрана произвольная точка Z на этом отрезке. Девять лучей из точки Z делят развернутый угол XZY на 10 равных частей и пересекают полуокружность в точках $A_1, A_2, \ldots, A_9$ соответственно (в порядке обхода от X к Y). Докажите, что сумма площадей треугольников A_2ZA_3 и A_7ZA_8 равна площади четырехугольника $A_2A_3A_7A_8$. (*М. Евдокимов*)

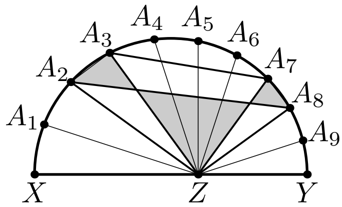

Рис. 9

Решение. Покажем, что $S(A_2ZA_8) = S(A_3ZA_7)$. Требуемое в условии равенство получается вычитанием из обеих частей этого равенства площади серого треугольника с вершиной в точке Z, а также добавлением площадей двух серых треугольников, примыкающих к хордам A_2A_3 и A_7A_8 (см. рис. 9). Заметим, что $\angle A_2ZA_8 + \angle A_3ZA_7 = \frac{6}{10} \cdot 180^\circ + \frac{4}{10} \cdot 180^\circ = 180^\circ$, поэтому синусы этих углов равны. Поэтому достаточно доказать, что $ZA_2 \cdot ZA_8 = ZA_3 \cdot ZA_7$. Покажем, что оба произведения равны $XZ \cdot XY$. Для этого достаточно доказать следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. *Пусть P и Q — две точки на полуокружности с диаметром XY, точка Z лежит на отрезке XY и $\angle XZP = \angle YZQ$. Тогда $ZP \cdot ZQ = ZX \cdot ZY$.*

Доказательство. Отметим точку R, симметричную Q относительно XY. Тогда четырехугольник $XPYR$ вписан в окружность с диаметром XY. Также в силу симметрии $ZQ = ZR$ и $\angle XZP = \angle QZY = \angle RZY$, то есть точки P, Z, R лежат на одной прямой. Значит, Z — точка пересечения диагоналей вписанного четырехугольника $XPYR$, поэтому $XZ \cdot XY = PZ \cdot ZR = PZ \cdot ZQ$. Таким образом, лемма доказана, что завершает решение задачи. □

Комментарий.

(А1) Задача сведена к равенству $S(A_2ZA_8) = S(A_3ZA_7)$ — 1 балл.

(A2) Задача сведена к равенству произведений $ZA_2 \cdot ZA_8 = = ZA_3 \cdot ZA_7$ — 2 балла.

(A3) В дополнении к A2. есть гипотеза, что оба произведения равны $ZX \cdot ZY$ — 3 балла.

(B) В работе сформулирована лемма из решения — 1 балл.

(C) В работе доказана лемма из решения — 3 балла.

Суммируются лишь продвижения из разных групп (A), (B), (C), продвижения за критерии одной группы не суммируются.

11.5. Уравнение $t^4 + at^3 + bt^2 = (a+b)(2t-1)$ имеет положительные решения $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$. Докажите, что $t_1 t_4 > t_2 t_3$.

(*М. Антипов*)

Решение. Обозначим $k = -a, \ell = a + b$, и перепишем уравнение в виде:

$$t^4 - kt^3 + (k+\ell)t^2 - 2\ell t + \ell = 0.$$

Заметим, что $k = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 > 0$ и $\ell = t_1 t_2 t_3 t_4 > 0$.

Дальше, перепишем уравнение в виде

$$t^4 + \ell(t-1)^2 = kt^2(t-1),$$

откуда сразу следует, что все его корни строго больше 1.

Добавим к каждой части $2\sqrt{\ell}\, t^2(t-1)$, уравнение превратится в

$$(t^2 + u(t-1))^2 = v^2 t^2 (t-1),$$

где $u = \sqrt{\ell}, v = \sqrt{k + 2\sqrt{\ell}}$. Если обозначить $s = \sqrt{t-1}$, то получим однородное уравнение $t^2 - vst + us^2 = 0$, из которого следует, что $t/s = c_{1,2}$, где $c_1 = (v - \sqrt{v^2 - 4u})/2$, $c_2 = (v + \sqrt{v^2 - 4u})/2$.

Дальше, каждое из уравнений $t/s = c_i$ можно переписать в виде $t^2 - c_i t + c_i = 0$. Эти уравнения различны, и каждое из них имеет два различных положительных корня, так как исходное уравнение имеет 4 различных положительных корня. Из этого следует, что $4 < c_1 < c_2$.

Так как функция $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 4x}$ строго убывает при $x > 4$ (это несложно показать, например, взяв производную), то $c_2 - \sqrt{c_2^2 - 4c_2} < c_1 - \sqrt{c_1^2 - 4c_1}$.

Теперь уже легко вычислить и упорядочить t_i:

$$t_1 = \frac{c_2 - \sqrt{c_2^2 - 4c_2}}{2} < t_2 = \frac{c_1 - \sqrt{c_1^2 - 4c_1}}{2} <$$

$$< t_3 = \frac{c_1 + \sqrt{c_1^2 - 4c_1}}{2} < t_4 = \frac{c_2 + \sqrt{c_2^2 - 4c_2}}{2},$$

значит, $t_1 t_4 = c_2 > c_1 = t_2 t_3$.

Замечание. Из доказательства следует, что оценка точна, то есть разницу $t_1 t_4 - t_2 t_3$ можно сделать сколь угодно близко к 0.

Комментарий. Неравенство $t_1 < t_2$ не обосновано — снимаются 2 балла.