9 класс

Первый день

9.1. Каждая целочисленная точка плоскости окрашена в один из трех цветов, причем все три цвета присутствуют. Докажите, что найдется прямоугольный треугольник с вершинами трех разных цветов.

9.2. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности. Биссектрисы внешних углов A и B пересекаются в точке K, внешних углов B и C — в точке L, внешних углов C и D — в точке M, внешних углов D и A — в точке N. Пусть K_1, L_1, M_1, N_1 — точки пересечения высот треугольников ABK, BCL, CDM, DAN соответственно. Докажите, что четырехугольник $K_1L_1M_1N_1$ — параллелограмм.

9.3. На столе стоят 2004 коробочки, в каждой из которых лежит по одному шарику. Известно, что некоторые из шариков — белые, и их количество четно. Разрешается указать на любые две коробочки и спросить, есть ли в них хотя бы один белый шарик. За какое наименьшее количество вопросов можно гарантированно определить какие-нибудь две коробочки, в которых лежат белые шарики?

9.4. Даны натуральное число $n > 3$ и положительные числа x_1, x_2, $\ldots$, x_n, произведение которых равно 1. Докажите неравенство

$$\frac{1}{1+x_1+x_1x_2}+\frac{1}{1+x_2+x_2x_3}+\ldots+\frac{1}{1+x_n+x_nx_1}>1.$$

9 класс

Второй день

9.5. Существуют ли такие попарно различные натуральные числа m, n, p, q, что $m+n=p+q$ и $\sqrt{m}+\sqrt[3]{n}=\sqrt{p}+\sqrt[3]{q}>2004$?

9.6. В кабинете президента стоят 2004 телефона, любые два из которых соединены проводом одного из четырех цветов. Известно, что провода всех четырех цветов присутствуют. Всегда ли можно выбрать несколько телефонов так, чтобы среди соединяющих их проводов встречались провода ровно трех цветов?

9.7. Натуральные числа от 1 до 100 расставлены по кругу в таком порядке, что каждое число либо больше обоих соседей, либо меньше обоих соседей. Пара соседних чисел называется *хорошей*, если при выкидывании этой пары вышеописанное свойство сохраняется. Какое минимальное количество хороших пар может быть?

9.8. Пусть O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC, T — центр описанной окружности треугольника AOC, M — середина AC. На сторонах AB и BC выбраны точки D и E соответственно так, что $\angle BDM=\angle BEM=\angle ABC$. Докажите, что $BT\perp DE$.

10 класс

Первый день

10.1. Каждая целочисленная точка плоскости окрашена в один из трех цветов, причем все три цвета присутствуют. Докажите, что найдется прямоугольный треугольник с вершинами трех разных цветов.

10.2. На столе стоят 2004 коробочки, в каждой из которых лежит по одному шарику. Известно, что некоторые из шариков — белые, и их количество четно. Разрешается указать на любые две коробочки и спросить, есть ли в них хотя бы один белый шарик. За какое наименьшее количество вопросов можно гарантированно определить какую-нибудь коробочку, в которой лежит белый шарик?

10.3. Четырехугольник $ABCD$ является одновременно и вписанным, и описанным, причем вписанная в $ABCD$ окружность касается его сторон AB, BC, CD и AD в точках K, L, M, N соответственно. Биссектрисы внешних углов A и B четырехугольника пересекаются в точке K', внешних углов B и C — в точке L', внешних углов C и D — в точке M', внешних углов D и A — в точке N'.

Докажите, что прямые KK', LL', MM' и NN' проходят через одну точку.

10.4. Даны натуральное число $n > 3$ и положительное число $x_1, x_2, \ldots, x_n$, произведение которых равно 1. Докажите неравенство

$$\frac{1}{1+x_1+x_1x_2}+\frac{1}{1+x_2+x_2x_3}+\ldots+\frac{1}{1+x_n+x_nx_1}>1.$$

10 класс

Второй день

10.5. Последовательность неотрицательных рациональных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ удовлетворяет соотношению $a_m + a_n = a_{mn}$ при любых натуральных m, n. Докажите, что не все ее члены различны.

10.6. В стране 1001 город, любые два города соединены дорогой с односторонним движением. Из каждого города выходит ровно 500 дорог, в каждый город входит ровно 500 дорог. От страны отделилась независимая республика, в которую вошли 668 городов. Докажите, что из любого города этой республики можно доехать до любого другого ее города, не выезжая за пределы республики.

10.7. Треугольник T содержится внутри центрально-симметричного многоугольника M. Треугольник T' получается при отражении треугольника T относительно некоторой точки P, лежащей внутри треугольника T. Докажите, что хотя бы одна из вершин треугольника T' лежит внутри или на границе многоугольника M.

10.8. Существует ли такое натуральное число $n > 10^{1000}$, не делящееся на 10, что в его десятичной записи можно переставить две различные ненулевые цифры так, чтобы множество его простых делителей не изменилось?

11 класс

Первый день

11.1. Каждая целочисленная точка плоскости окрашена в один из трех цветов, причем все три цвета присутствуют. Докажите, что найдется прямоугольный треугольник с вершинами трех разных цветов.

11.2. Пусть I_A и I_B — центры вневписанных окружностей, касающихся сторон BC и CA треугольника ABC соответственно, а P — точка на окружности Ω, описанной около этого треугольника. Докажите, что середина отрезка, соединяющего центры описанных окружностей треугольников I_ACP и I_BCP, совпадает с центром окружности Ω.

11.3. Даны многочлены $P(x)$, $Q(x)$. Известно, что для некоторого многочлена $R(x, y)$ выполняется равенство $P(x) - P(y) = R(x, y)(Q(x) - Q(y))$. Докажите, что существует многочлен $S(x)$ такой, что $P(x) = S(Q(x))$.

11.4. В прямоугольной таблице 9 строк и 2004 столбца. В ее клетках расставлены числа от 1 до 2004, каждое — по 9 раз. При этом в любом столбце числа различаются не более, чем на 3. Найдите минимальную возможную сумму чисел в первой строке.

11 класс

Второй день

11.5. Пусть $M = \{x_1, \ldots, x_{30}\}$ — множество, состоящее из 30 различных положительных чисел; A_n $(1 \leqslant n \leqslant 30)$ — сумма всевозможных произведений различных n элементов множества M. Докажите, что если $A_{15} > A_{10}$, то $A_1 > 1$.

11.6. Докажите, что не существует конечного множества, содержащего более $2N$ $(N > 3)$ попарно неколлинеарных векторов на плоскости, обладающего следующими двумя свойствами:

1) для любых N векторов этого множества найдется еще такой $N-1$ вектор из этого множества, что сумма всех $2N-1$ векторов равна нулю;

2) для любых N векторов этого множества найдутся еще такие N векторов из этого множества, что сумма всех $2N$ векторов равна нулю.

11.7. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены двусторонними беспосадочными авиалиниями, принадлежащими k авиакомпаниям. Известно, что любые две линии одной авиакомпании имеют общий конец. Докажите, что все города можно разбить на $k+2$ группы так, что никакие два города из одной группы не соединены авиалинией.

11.8. В прямоугольном параллелепипеде проведено сечение, являющееся шестиугольником. Известно, что этот шестиугольник можно поместить в некоторый прямоугольник П. Докажите, что в прямоугольник П можно поместить одну из граней параллелепипеда.