9 класс

Первый день

9.1. Дана доска 15×15. Некоторые пары центров соседних по стороне клеток соединили отрезками так, что получилась замкнутая несамопересекающаяся ломаная, симметричная относительно одной из диагоналей доски. Докажите, что длина ломаной не больше 200.

9.2. Докажите, что найдутся 4 таких целых числа a, b, c, d, по модулю больших $1\,000\,000$, что
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{abcd}\,.$$

9.3. Петя раскрашивает 2006 точек, расположенных на окружности, в 17 цветов. Затем Коля проводит хорды с концами в отмеченных точках так, чтобы концы любой хорды были одноцветны и хорды не имели общих точек (в том числе и общих концов). При этом Коля хочет провести как можно больше хорд, а Петя старается ему помешать. Какое наибольшее количество хорд заведомо сможет провести Коля?

9.4. Дан треугольник ABC. Окружность ω касается описанной окружности треугольника ABC в точке A, пересекает сторону AB в точке K, а также пересекает сторону BC. Касательная CL к окружности ω такова, что отрезок KL пересекает сторону BC в точке T. Докажите, что отрезок BT равен по длине касательной из точки B к ω.

9 класс

Второй день

9.5. Пусть a_1, a_2, ..., a_{10} — натуральные числа, $a_1 < a_2 < \ldots < a_{10}$. Пусть b_k — наибольший делитель a_k такой, что $b_k < a_k$. Оказалось, что $b_1 > b_2 > \ldots > b_{10}$. Докажите, что $a_{10} > 500$.

9.6. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC выбраны точки P, Q, R соответственно таким образом, что $AP = CQ$ и четырехугольник $RPBQ$ — вписанный. Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках A и C пересекают прямые RP и RQ в точках X и Y соответственно. Докажите, что $RX = RY$.

9.7. Клетчатый квадрат 100×100 разрезан на доминошки: прямоугольники 1×2. Двое играют в игру. Каждым ходом игрок склеивает две соседних по стороне клетки, между которыми был проведен разрез. Игрок проигрывает, если после его хода фигура получилась связной, т. е. весь квадрат можно поднять со стола, держа его за одну клетку. Кто выиграет при правильной игре — начинающий или его соперник?

9.8. Дан квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + ax + b$. Уравнение $f(f(x)) = 0$ имеет четыре различных действительных корня, сумма двух из которых равна -1. Докажите, что $b \leqslant -\frac{1}{4}$.

10 класс

Первый день

10.1. Дана доска 15×15. Некоторые пары центров соседних по стороне клеток соединили отрезками так, что получилась замкнутая несамопересекающаяся ломаная, симметричная относительно одной из диагоналей доски. Докажите, что длина ломаной не больше 200.

10.2. Сумма кубов трех последовательных натуральных чисел оказалась кубом натурального числа. Докажите, что среднее из этих трех чисел делится на 4.

10.3. Петя раскрашивает 2006 точек, расположенных на окружности, в 17 цветов. Затем Коля проводит хорды с концами в отмеченных точках так, чтобы концы любой хорды были одноцветны и хорды не имели общих точек (в том числе и общих концов). При этом Коля хочет провести как можно больше хорд, а Петя старается ему помешать. Какое наибольшее количество хорд заведомо сможет провести Коля?

10.4. Окружность ω касается равных сторон AB и AC равнобедренного треугольника ABC и пересекает сторону BC в точках K и L. Отрезок AK пересекает ω второй раз в точке M. Точки P и Q симметричны точке K относительно точек B и C соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника PMQ касается окружности ω.

10 класс

Второй день

10.5. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ — натуральные числа, $a_1 < a_2 < \ldots < a_{10}$. Пусть b_k — наибольший делитель a_k такой, что $b_k < a_k$. Оказалось, что $b_1 > b_2 > \ldots > b_{10}$. Докажите, что $a_{10} > 500$.

10.6. На дугах AB и BC окружности, описанной около треугольника ABC, выбраны соответственно точки K и L так, что прямые KL и AC параллельны. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ABK и CBL равноудалены от середины дуги ABC.

10.7. Дан квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + ax + b$. Уравнение $f(f(x)) = 0$ имеет четыре различных действительных корня, сумма двух из которых равна -1. Докажите, что $b \leqslant -\frac{1}{4}$.

10.8. Квадрат $3\,000 \times 3\,000$ произвольным образом разбит на доминошки (т. е. прямоугольники 1×2 клетки). Докажите, что доминошки можно раскрасить в три цвета так, чтобы доминошек каждого цвета было поровну и у каждой доминошки было не более двух соседей ее цвета (доминошки считаются соседними, если они содержат клетки, соседние по стороне).

11 класс

Первый день

11.1. Докажите, что $\sin\sqrt{x} < \sqrt{\sin x}$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

11.2. Сумма и произведение двух чисто периодических десятичных дробей – чисто периодические дроби с периодом T. Докажите, что исходные дроби имеют периоды не больше T.

11.3. В клетчатом прямоугольнике 49×69 отмечены все $50\cdot70$ вершин клеток. Двое играют в следующую игру: каждым своим ходом каждый игрок соединяет две точки отрезком, при этом одна точка не может являться концом двух проведенных отрезков. Отрезки могут содержать общие точки. Отрезки проводятся до тех пор, пока точки не кончатся. Если после этого первый может выбрать на всех проведенных отрезках направления так, что сумма всех полученных векторов равна нулевому вектору, то он выигрывает, иначе выигрывает второй. Кто выигрывает при правильной игре?

11.4. Биссектрисы BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке I. Прямая B_1C_1 пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках M и N. Докажите, что радиус описанной окружности треугольника MIN вдвое больше радиуса описанной окружности треугольника ABC.

11 класс

Второй день

11.5. Последовательности положительных чисел (x_n) и (y_n) удовлетворяют условиям $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}^2$, $y_{n+2} = y_n^2 + y_{n+1}$ при всех натуральных n. Докажите, что если все числа x_1, x_2, y_1, y_2 больше 1, то $x_n > y_n$ при каком-нибудь натуральном n.

11.6. Окружность с центром I, вписанная в грань ABC треугольной пирамиды $SABC$, касается отрезков AB, BC, CA в точках D, E, F соответственно. На отрезках SA, SB, SC отмечены соответственно точки A', B', C' так, что $AA' = AD$, $BB' = BE$, $CC' = CF$; S' — точка на описанной сфере пирамиды, диаметрально противоположная точке S. Известно, что SI является высотой пирамиды. Докажите, что точка S' равноудалена от точек A', B', C'.

11.7. Известно, что многочлен $(x+1)^n - 1$ делится на некоторый многочлен $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + c_{k-2}x^{k-2} + \ldots + c_1x + c_0$ четной степени k, у которого все коэффициенты c_0, c_1, $\ldots$, c_{k-1} — целые нечетные числа. Докажите, что n делится на $k+1$.

11.8. В лагерь приехало несколько пионеров, каждый из них имеет от 50 до 100 знакомых среди остальных. Докажите, что пионерам можно выдать пилотки, покрашенные в 1331 цвет так, чтобы у знакомых каждого пионера были пилотки хотя бы 20 различных цветов.