8 класс

Второй день

8.5. От Майкопа до Белореченска 24 км. Три друга должны добраться: двое из Майкопа в Белореченск, а третий — из Белореченска в Майкоп. У них есть один велосипед, первоначально находящийся в Майкопе. Каждый из друзей может идти (со скоростью не более 6 км/час) и ехать на велосипеде (со скоростью не более 18 км/час). Оставлять велосипед без присмотра нельзя. Докажите, что через 2 часа 40 минут все трое друзей могут оказаться в пунктах назначения. Ехать на велосипеде вдвоем нельзя.

8.6. Через точку I пересечения биссектрис треугольника ABC проведена прямая, пересекающая стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Треугольник BMN оказался остроугольным. На стороне AC выбраны точки K и L так, что $\angle ILA = \angle IMB$, $\angle IKC = \angle INB$. Докажите, что $AM + KL + CN = AC$.

8.7. Для натурального $n > 3$ будем обозначать через $n?$ (n-вопросиал) произведение всех простых чисел, меньших n. Решите уравнение $n? = 2n + 16$.

8.8. В таблице 10×10 расставлены числа от 1 до 100: в первой строчке — от 1 до 10 слева направо, во второй — от 11 до 20 слева направо и т. д. Андрей собирается разрезать таблицу на прямоугольники 1×2, посчитать произведение чисел в каждом прямоугольнике и сложить полученные 50 чисел. Он стремится получить как можно меньшую сумму. Как ему следует разрезать квадрат?

XXXIII Всероссийская математическая олимпиада школьников

8 класс

Второй день

8.5. От Майкопа до Белореченска 24 км. Три друга должны добраться: двое из Майкопа в Белореченск, а третий — из Белореченска в Майкоп. У них есть один велосипед, первоначально находящийся в Майкопе. Каждый из друзей может идти (со скоростью не более 6 км/час) и ехать на велосипеде (со скоростью не более 18 км/час). Оставлять велосипед без присмотра нельзя. Докажите, что через 2 часа 40 минут все трое друзей могут оказаться в пунктах назначения. Ехать на велосипеде вдвоем нельзя.

8.6. Через точку I пересечения биссектрис треугольника ABC проведена прямая, пересекающая стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Треугольник BMN оказался остроугольным. На стороне AC выбраны точки K и L так, что $\angle ILA = \angle IMB$, $\angle IKC = \angle INB$. Докажите, что $AM + KL + CN = AC$.

8.7. Для натурального $n > 3$ будем обозначать через $n?$ (n-вопросиал) произведение всех простых чисел, меньших n. Решите уравнение $n? = 2n + 16$.

8.8. В таблице 10×10 расставлены числа от 1 до 100: в первой строчке — от 1 до 10 слева направо, во второй — от 11 до 20 слева направо и т. д. Андрей собирается разрезать таблицу на прямоугольники 1×2, посчитать произведение чисел в каждом прямоугольнике и сложить полученные 50 чисел. Он стремится получить как можно меньшую сумму. Как ему следует разрезать квадрат?

9 класс

Второй день

9.5. В каждой вершине выпуклого 100-угольника написано по два различных числа. Докажите, что можно вычеркнуть по одному числу в каждой вершине так, чтобы оставшиеся числа в любых двух соседних вершинах были различными.

9.6. Дан остроугольный треугольник ABC. Точки M и N — середины сторон AB и BC соответственно, точка H — основание высоты, опущенной из вершины B. Описанные окружности треугольников AHN и CHM пересекаются в точке P ($P \neq H$). Докажите, что прямая PH проходит через середину отрезка MN.

9.7. В таблице 10×10 расставлены числа от 1 до 100: в первой строчке — от 1 до 10 слева направо, во второй — от 11 до 20 слева направо и т. д. Андрей собирается разрезать таблицу на прямоугольники 1×2, посчитать произведение чисел в каждом прямоугольнике и сложить полученные 50 чисел. Он стремится получить как можно меньшую сумму. Как ему следует разрезать квадрат?

9.8. Дима посчитал факториалы всех натуральных чисел от 80 до 99, нашел числа, обратные к ним, и напечатал получившиеся десятичные дроби на 20 бесконечных ленточках (например, на последней ленточке было напечатано число $\frac{1}{99!} = 0{,}\underbrace{00\ldots00}_{155\text{ нулей}}10715\ldots$). Саша хочет вырезать из одной ленточки кусок, на котором записано N цифр подряд и нет запятой. При каком наибольшем N он сможет это сделать так, чтобы Дима не смог определить по этому куску, какую ленточку испортил Саша?

XXXIII Всероссийская математическая олимпиада школьников

9 класс

Второй день

9.5. В каждой вершине выпуклого 100-угольника написано по два различных числа. Докажите, что можно вычеркнуть по одному числу в каждой вершине так, чтобы оставшиеся числа в любых двух соседних вершинах были различными.

9.6. Дан остроугольный треугольник ABC. Точки M и N — середины сторон AB и BC соответственно, точка H — основание высоты, опущенной из вершины B. Описанные окружности треугольников AHN и CHM пересекаются в точке P ($P \neq H$). Докажите, что прямая PH проходит через середину отрезка MN.

9.7. В таблице 10×10 расставлены числа от 1 до 100: в первой строчке — от 1 до 10 слева направо, во второй — от 11 до 20 слева направо и т. д. Андрей собирается разрезать таблицу на прямоугольники 1×2, посчитать произведение чисел в каждом прямоугольнике и сложить полученные 50 чисел. Он стремится получить как можно меньшую сумму. Как ему следует разрезать квадрат?

9.8. Дима посчитал факториалы всех натуральных чисел от 80 до 99, нашел числа, обратные к ним, и напечатал получившиеся десятичные дроби на 20 бесконечных ленточках (например, на последней ленточке было напечатано число $\frac{1}{99!} = 0{,}\underbrace{00\ldots00}_{155\text{ нулей}}10715\ldots$). Саша хочет вырезать из одной ленточки кусок, на котором записано N цифр подряд и нет запятой. При каком наибольшем N он сможет это сделать так, чтобы Дима не смог определить по этому куску, какую ленточку испортил Саша?

10 класс

Второй день

10.5. Дан набор из $n > 2$ векторов. Назовем вектор набора *длинным*, если его длина не меньше длины суммы остальных векторов набора. Докажите, что если каждый вектор набора — длинный, то сумма всех векторов набора равна нулю.

10.6. Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Пусть PQ и RS — отрезки общих внешних касательных к этим окружностям (точки P и R лежат на ω_1, точки Q и S — на ω_2). Оказалось, что $RB \parallel PQ$. Луч RB вторично пересекает ω_2 в точке W. Найдите отношение RB/BW.

10.7. У выпуклого многогранника одна вершина A имеет степень 5, а все остальные — степень 3 (степенью вершины называется количество выходящих из нее ребер). Назовем раскраску ребер многогранника в синий, красный и лиловый цвета *хорошей*, если для любой вершины степени 3 все выходящие из нее ребра покрашены в разные цвета. Оказалось, что количество хороших раскрасок не делится на 5. Докажите, что в одной из хороших раскрасок какие-то три последовательных ребра, выходящие из A, покрашены в один цвет.

10.8. Дима посчитал факториалы всех натуральных чисел от 80 до 99, нашел числа, обратные к ним, и напечатал получившиеся десятичные дроби на 20 бесконечных ленточках (например, на последней ленточке было напечатано число $\frac{1}{99!} = 0{,}\underbrace{00\ldots00}_{155\text{ нулей}}10715\ldots$). Саша хочет вырезать из одной ленточки кусок, на котором записано N цифр подряд и нет запятой. При каком наибольшем N он сможет это сделать так, чтобы Дима не смог определить по этому куску, какую ленточку испортил Саша?

XXXIII Всероссийская математическая олимпиада школьников

10 класс

Второй день

10.5. Дан набор из $n > 2$ векторов. Назовем вектор набора *длинным*, если его длина не меньше длины суммы остальных векторов набора. Докажите, что если каждый вектор набора — длинный, то сумма всех векторов набора равна нулю.

10.6. Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Пусть PQ и RS — отрезки общих внешних касательных к этим окружностям (точки P и R лежат на ω_1, точки Q и S — на ω_2). Оказалось, что $RB \parallel PQ$. Луч RB вторично пересекает ω_2 в точке W. Найдите отношение RB/BW.

10.7. У выпуклого многогранника одна вершина A имеет степень 5, а все остальные — степень 3 (степенью вершины называется количество выходящих из нее ребер). Назовем раскраску ребер многогранника в синий, красный и лиловый цвета *хорошей*, если для любой вершины степени 3 все выходящие из нее ребра покрашены в разные цвета. Оказалось, что количество хороших раскрасок не делится на 5. Докажите, что в одной из хороших раскрасок какие-то три последовательных ребра, выходящие из A, покрашены в один цвет.

10.8. Дима посчитал факториалы всех натуральных чисел от 80 до 99, нашел числа, обратные к ним, и напечатал получившиеся десятичные дроби на 20 бесконечных ленточках (например, на последней ленточке было напечатано число $\frac{1}{99!} = 0{,}\underbrace{00\ldots00}_{155\text{ нулей}}10715\ldots$). Саша хочет вырезать из одной ленточки кусок, на котором записано N цифр подряд и нет запятой. При каком наибольшем N он сможет это сделать так, чтобы Дима не смог определить по этому куску, какую ленточку испортил Саша?

11 класс

Второй день

11.5. В каждой вершине выпуклого 100-угольника написано по два различных числа. Докажите, что можно вычеркнуть по одному числу в каждой вершине так, чтобы оставшиеся числа в любых двух соседних вершинах были различными.

11.6. Существуют ли ненулевые числа a, b, c такие, что при любом $n > 3$ можно найти многочлен вида $P_n(x) = x^n + \ldots + ax^2 + bx + c$, имеющий ровно n (не обязательно различных) целых корней?

11.7. Дана треугольная пирамида. Леша хочет выбрать два ее скрещивающихся ребра и на них, как на диаметрах, построить шары. Всегда ли он может выбрать такую пару, что любая точка пирамиды лежит хотя бы в одном из этих шаров?

11.8. В стране есть N городов. Некоторые пары из них соединены беспосадочными двусторонними авиалиниями. Оказалось, что для любого k $(2 \leqslant k \leqslant N)$ при любом выборе k городов количество авиалиний между этими городами не будет превосходить $2k-2$. Докажите, что все авиалинии можно распределить между двумя авиакомпаниями так, что не будет замкнутого авиамаршрута, в котором все авиалинии принадлежат одной компании.

XXXIII Всероссийская математическая олимпиада школьников

11 класс

Второй день

11.5. В каждой вершине выпуклого 100-угольника написано по два различных числа. Докажите, что можно вычеркнуть по одному числу в каждой вершине так, чтобы оставшиеся числа в любых двух соседних вершинах были различными.

11.6. Существуют ли ненулевые числа a, b, c такие, что при любом $n > 3$ можно найти многочлен вида $P_n(x) = x^n + \ldots + ax^2 + bx + c$, имеющий ровно n (не обязательно различных) целых корней?

11.7. Дана треугольная пирамида. Леша хочет выбрать два ее скрещивающихся ребра и на них, как на диаметрах, построить шары. Всегда ли он может выбрать такую пару, что любая точка пирамиды лежит хотя бы в одном из этих шаров?

11.8. В стране есть N городов. Некоторые пары из них соединены беспосадочными двусторонними авиалиниями. Оказалось, что для любого k $(2 \leqslant k \leqslant N)$ при любом выборе k городов количество авиалиний между этими городами не будет превосходить $2k-2$. Докажите, что все авиалинии можно распределить между двумя авиакомпаниями так, что не будет замкнутого авиамаршрута, в котором все авиалинии принадлежат одной компании.