Итак, для каждого особого члена последовательности, дробная часть которого имеет ненулевой числитель, мы нашли особый член с меньшим числителем дробной части. Так как числитель — натуральное число, которое не может уменьшаться бесконечно много раз, в последовательности встретится член, дробная часть которого равна 0, что и требовалось доказать.

Материалы для проведения

V-го этапа XXXIII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2006–2007 учебный год

Первый день

Майкоп, 23–28 апреля 2007 г.

Москва, 2007

Сборник содержит материалы для проведения V (заключительного) этапа XXXIII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической Комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н.Х. Агаханов, А.В. Акопян, В.В. Астахов, А.И. Бадзян, С.Л. Берлов, И.И. Богданов, С.Г. Волченков, А.А. Гаврилюк, А.И. Гарбер, Р.А. Гимадеев, А.А. Глазырин, А.С. Голованов, В.Л. Дольников, Л.А. Емельянов, Г.М. Иванов, М.И. Исаев, Р.Н. Карасев, Д.В. Карпов, М.А. Козачок, П.Ю. Козлов, А.Н. Магазинов, П.В. Мартынов, Ю.С. Мешин, М.В. Мурашкин, А.В. Пастор, О.К. Подлипский, И.С. Рубанов, В.А. Сендеров, К.А. Сухов, Д.А. Терешин, С.И. Токарев, В.П. Филимонов, А.И. Храбров, Г.Р. Челноков, К.В. Чувилин.

В скобках после каждой задачи указана фамилия ее автора.

Компьютерный макет: И.И. Богданов, А.В. Полозов.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

санный. Аналогично, вписанным является и четырехугольник $PAQC_1$, поэтому $\angle PQR = \angle PQA + \angle RQA = \angle PC_1A + \angle RB_1A = \angle A_1C_1B + \angle A_1B_1C$. Поскольку оба слагаемых — углы между касательными и хордами, имеем $\angle PQR = \frac{1}{2}\,(\overset{\smile}{A_1C_1} + \overset{\smile}{A_1B_1}) = \frac{1}{2}\,\overset{\smile}{B_1A_1C_1} = \angle B_1QC_1$, что и требовалось.

11.3. См. решение задачи 10.4.

11.4. Назовем *особым* членом последовательности такой член x_n, для которого $[x_n] > [x_{n-1}]$. Очевидно, особых членов бесконечно много (так как если $[x_n] = k$, то $[x_{n+k}] > [x_n]$). Для каждого особого члена представим его дробную часть в виде несократимой дроби (если особый член — целое число, будем считать числитель его дробной части равным 0). Мы докажем, что числитель этой дроби у каждого следующего особого члена не больше, чем у предыдущего; кроме того, если этот числитель больше 0, то найдется особый член, у которого соответствующий числитель меньше.

Пусть x_k — особый член. Обозначим его целую часть через m (очевидно, $m \geqslant 2$), а дробную — через r. Поскольку $[x_{k-1}] = m-1$, то имеет место неравенство $r < \frac{1}{m-1} \leqslant \frac{2}{m}$. Если $r < \frac{1}{m}$, то следующие m членов последовательности будут равны $x_{k+1} = x_k + \frac{1}{m}$, $x_{k+2} = x_k + \frac{2}{m}, \ldots, x_{k+m-1} = x_k + \frac{m-1}{m} = m + r + \frac{m-1}{m} < m+1$, $x_{k+m} = x_k + 1$. Как видно, x_{k+m} — очередной особый член, по сравнению с предыдущим его дробная часть не изменилась, а целая часть увеличилась на 1. Продолжая в том же духе, мы придем, наконец, к особому члену x_l, целая часть которого $p = [x_l]$ и дробная часть $s = \{x_l\}$ удовлетворяют условию $\frac{1}{p} \leqslant s < \frac{1}{p+1}$. Тогда следующие члены последовательности будут равны $x_{l+1} = x_l + \frac{1}{p}$, $x_{l+2} = x_l + \frac{2}{p}, \ldots$, $x_{l+p-2} = x_l + \frac{p-2}{p} = p + s + \frac{p-2}{p} < p + \frac{2}{p} + \frac{p-2}{p}p = p+1$, $x_{l+p-1} = x_l + \frac{p-1}{p} = (p+1) + (s - \frac{1}{p})$. Новый особый член x_{l+p-1} имеет дробную часть $s - \frac{1}{p}$. Докажем, что числитель у нее меньше, чем у s. Действительно, если $s = \frac{a}{b}$, то $s - \frac{1}{p} = \frac{ap-b}{pb}$, и, поскольку $\frac{a}{b} < \frac{1}{p-1}$, выполняется неравенство $ap - a < b \iff ap - b < a$.

нуть две цифры, а на остальные $N-2$ позиции есть по 10 вариантов на каждую). Нетрудно видеть, что $k_2 = 10^N$. Тогда из $k_1 \geqslant k_2$ следует, что $N-1 \geqslant 100$, т. е. $N \geqslant 101$.

Покажем, как выполнить фокус при $N = 101$. Пусть сумма всех цифр на нечетных позициях имеет остаток s от деления на 10, а сумма всех цифр на четных позициях имеет остаток t от деления на 10 (позиции нумеруются слева направо числами от 0 до 100). Положим $p = 10s + t$. Пусть помощник закроет цифры, стоящие на позициях p и $p+1$. Увидев, какие цифры закрыты, фокусник определит p, а следовательно, определит s и t. Отметим, что одна закрытая цифра стоит на нечетной позиции, а другая — на четной. Таким образом, вычислив сумму открытых цифр на нечетных позициях и зная s, фокусник определит закрытую цифру, стоящую на нечетной позиции. Аналогично определяется закрытая цифра, стоящая на четной позиции.

11 класс

11.1. Заметим, что

$$|\sin 3x| = |3\sin x - 4\sin^3 x| = |3 - 4\sin^2 x|\,|\sin x| \leqslant 3|\sin x|.$$

Поэтому для функции f_1, полученной из f заменой $\cos 3x$ на $\sin 3x$, выполняется неравенство

$$|f_1(x)| \leqslant 3|\sin x|\,|\cos x|\,|\cos 2x|\,|\cos 4x|\,|\cos 8x| \ldots |\cos 2^k x|.$$

(Мы опустили все множители $|\cos nx|$, в которых $n > 3$ и не является степенью двойки; каждый из этих множителей не превосходит 1.) Утверждение задачи теперь следует из тождества

$$\sin x \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x \ldots \cos 2^k x = 2^{-k-1} \sin 2^{k+1} x.$$

11.2. Так как BC — касательная ко вписанной окружности, то $\angle BA_1Q = \frac{1}{2}\overset{\frown}{A_1C_1Q} = \angle A_1B_1Q$; с другой стороны, $\angle BA_1A = \angle A_1AR$ как внутренние накрест лежащие. Поэтому $\angle QAR = \angle A_1B_1Q$, и четырехугольник ARB_1Q — впи-

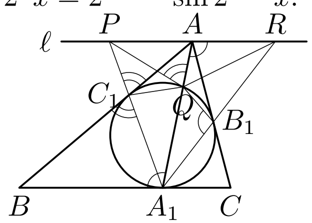

Рис. 4

Условия задач

8 класс

8.1. Даны числа a, b, c. Докажите, что хотя бы одно из уравнений $x^2 + (a-b)x + (b-c) = 0$, $x^2 + (b-c)x + (c-a) = 0$, $x^2 + (c-a)x + (a-b) = 0$ имеет решение. *(О. Подлипский)*

8.2. В клетках таблицы 10×10 произвольно расставлены натуральные числа от 1 до 100, каждое по одному разу. За один ход разрешается поменять местами любые два числа. Докажите, что за 35 ходов можно добиться того, чтобы сумма любых двух чисел, стоящих в клетках с общей стороной, была составной. *(Н. Агаханов)*

8.3. На стороне BC ромба $ABCD$ выбрана точка M. Прямые, проведенные через M перпендикулярно диагоналям BD и AC, пересекают прямую AD в точках P и Q соответственно. Оказалось, что прямые PB, QC и AM пересекаются в одной точке. Чему может быть равно отношение BM/MC? *(С. Берлов, Ф. Петров, А. Акопян)*

8.4. Фокусник Арутюн и его помощник Амаяк собираются показать следующий фокус. На доске нарисована окружность. Зрители отмечают на ней 2007 различных точек, затем помощник фокусника стирает одну из них. После этого фокусник впервые входит в комнату, смотрит на рисунок и отмечает полуокружность, на которой лежала стертая точка. Как фокуснику договориться с помощником, чтобы фокус гарантированно удался? *(А. Акопян, А. Акопян, А. Акопян, И. Богданов)*

9 класс

9.1. Приведенные квадратные трехчлены $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что уравнения $f(g(x)) = 0$ и $g(f(x)) = 0$ не имеют вещественных корней. Докажите, что хотя бы одно из уравнений $f(f(x)) = 0$ и $g(g(x)) = 0$ тоже не имеет вещественных корней. *(С. Берлов)*

9.2. На доске написали 100 дробей, у которых в числителях стоят все числа от 1 до 100 по одному разу, и в знаменателях стоят все числа от 1 до 100 по одному разу. Оказалось, что сумма этих дробей есть несократимая дробь со знаменателем 2. Докажите, что можно поменять местами числители двух дробей так, чтобы сумма стала несократимой дробью с нечетным знаменателем.

(*Н. Агаханов, И. Богданов*)

9.3. Два игрока по очереди проводят диагонали в правильном $(2n+1)$-угольнике ($n > 1$). Разрешается проводить диагональ, если она пересекается (по внутренним точкам) с четным числом ранее проведенных диагоналей (и не была проведена раньше). Проигрывает игрок, который не может сделать очередной ход. Кто выигрывает при правильной игре? (*К. Сухов*)

9.4. В треугольнике ABC проведена биссектриса BB_1. Перпендикуляр из B_1 на BC пересекает дугу BC описанной окружности треугольника ABC в точке K. Перпендикуляр из B на AK пересекает AC в точке L. Докажите что точки K, L и середина дуги AC (не содержащей точку B) лежат на одной прямой.

(*В. Астахов*)

10 класс

10.1. Грани куба $9\times9\times9$ разбиты на единичные клетки. Куб оклеен без наложений бумажными полосками 2×1 (стороны полосок идут по сторонам клеток). Докажите, что число согнутых полосок нечетно. (*А. Полянский*)

10.2. Дан многочлен $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$. Положим $m = \min\{a_0, a_0+a_1, \ldots, a_0+a_1+\ldots+a_n\}$. Докажите, что $P(x) \geqslant mx^n$ при $x \geqslant 1$. (*А. Храбров*)

10.3. В треугольнике ABC проведена биссектриса BB_1. Перпендикуляр из B_1 на BC пересекает дугу BC описанной окружности треугольника ABC в точке K. Перпендикуляр из B на AK пересекает AC в точке L. Докажите что точки K, L и середина дуги AC (не содержащей точку B) лежат на одной прямой.

(*В. Астахов*)

10.4. Фокусник с помощником собираются показать такой фокус.

ных треугольниках ALT и BSK имеем $\angle SBK = \angle LAT = \alpha$ как опирающиеся на одну дугу $\overset{\frown}{KC}$; поэтому $\angle B_1LB = \angle ALT = 90^\circ - \alpha = \angle BKS = \angle BKB_1$, т. е. точки B, B_1, L, K лежат на одной окружности. Отсюда $\angle BB_1K = \angle BLK = \beta$, и из прямоугольных треугольников BB_1S и KLT получаем $\angle AKL = \angle TKL = 90^\circ - \beta = \angle B_1BS = \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AKC$, что и означает, что KL проходит через середину $\overset{\frown}{AC}$.

10 класс

10.1. Покрасим клетки каждой грани куба в шахматном порядке так, чтобы угловые клетки были черными. При этом каждая грань содержит 41 черную и 40 белых клеток. Заметим, что все согнутые полоски будут одноцветными, а все остальные — нет. Так как количество черных клеток на 6 больше, чем количество белых, то число черных согнутых полосок на 3 больше, чем число белых. Следовательно, эти числа разной четности, и их сумма нечетна.

10.2. Поскольку $a_0 + a_1 + \ldots + a_k \geqslant m$, все суммы вида $-m + a_0 + a_1 + \ldots + a_k$ неотрицательны. Поэтому при $x \geqslant 1$ имеем цепочку неравенств

$$P(x) - mx^n = (-m+a_0)(x^n - x^{n-1}) + (-m+a_0+a_1)(x^{n-1} - x^{n-2}) + \ldots + (-m + a_0 + \ldots + a_{n-1})(x-1) + (-m + a_0 + \ldots + a_n) \geqslant 0,$$

так как каждое слагаемое неотрицательно.

10.3. См. решение задачи 9.4.

10.4. **Ответ.** При $N = 101$.

Предположим, что при каком-то значении N фокус удастся. Тогда по каждому варианту последовательности с двумя закрытыми цифрами (пусть их количество равно k_1) фокусник может восстановить исходную; значит, каждой последовательности с двумя закрытыми цифрами фокусник однозначно может поставить в соответствие восстановленную последовательность из N цифр (пусть их количество равно k_2). Следовательно, $k_1 \geqslant k_2$. Отметим, что $k_1 = (N-1)\cdot 10^{N-2}$ (есть $N-1$ вариант вычеркдробей с нечетными знаменателями ровно 50, и число a не является числителем ни одной из них. Поэтому среди числителей таких дробей не больше 49 имеют ту же четность, что и a.

Поменяем теперь местами числители a и b. Сделаем это в два приема: сначала поменяем числитель у дроби со знаменателем 2 (сумма изменилась на нечетное число $a-b$ половинок и, значит, превратилась в целое число), а затем — числитель дроби со знаменателем c (сумма изменилась на дробь с нечетным знаменателем, т. е. стала дробью с нечетным знаменателем).

9.3. **Ответ.** При нечетных n выигрывает второй, при четных n — первый.

Заметим, что число вершин по одну сторону от любой диагонали четно, а по другую — нечетно. Поэтому любую диагональ пересекает четное число других диагоналей $(2n+1)$-угольника.

Пусть в некоторый момент игры невозможно сделать ход, тогда каждая непроведенная диагональ пересекает нечетное число уже проведенных. Так как любая диагональ пересекает четное число диагоналей, то каждая непроведенная диагональ пересекает также нечетное число непроведенных диагоналей. Такая ситуация возможна только тогда, когда непроведенных диагоналей четное число. Действительно, посчитаем для каждой непроведенной диагонали число непроведенных диагоналей, пересекающих ее. В этой сумме каждая пара пересекающихся диагоналей учтена два раза, поэтому сумма четна, а все ее слагаемые нечетны. Значит, их четное число.

Таким образом, если общее количество диагоналей в многоугольнике нечетно, то выигрывает первый, а если четно — то выигрывает второй. Легко видеть, что в $(2n+1)$-угольнике число диагоналей нечетно при четном n (тогда выигрывает второй) и четно при нечетном n (тогда выигрывает первый).

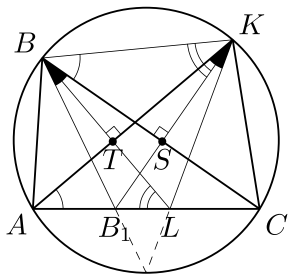

Рис. 3

9.4. Пусть S и T — основания перпендикуляров, опущенных из B_1 и B соответственно на BC и AK (см. рис. 3). В прямоуголь-

Зритель пишет на доске последовательность из N цифр. Помощник фокусника закрывает две соседних цифры черным кружком. Затем входит фокусник. Его задача — отгадать обе закрытые цифры (и порядок, в котором они расположены). При каком наименьшем N фокусник может договориться с помощником так, чтобы фокус гарантированно удался?

(К. Кноп, О. Леонтьева)

11 класс

11.1. Докажите, что при $k>10$ в произведении

$$f(x)=\cos x\cos 2x\cos 3x\ldots\cos 2^k x$$

можно заменить один cos на sin так, что получится функция $f_1(x)$, удовлетворяющая при всех действительных x неравенству $|f_1(x)|\leqslant \frac{3}{2^{k+1}}$. *(Н. Агаханов)*

11.2. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон BC, AC, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Отрезок AA_1 вторично пересекает вписанную окружность в точке Q. Прямая ℓ параллельна BC и проходит через A. Прямые A_1C_1 и A_1B_1 пересекают ℓ в точках P и R соответственно. Докажите, что $\angle PQR=\angle B_1QC_1$. *(А. Полянский)*

11.3. Фокусник с помощником собираются показать такой фокус. Зритель пишет на доске N-значное число. Помощник фокусника закрывает две соседних цифры черным кружком. Затем входит фокусник. Его задача — отгадать обе закрытые цифры (и порядок, в котором они расположены). При каком наименьшем N фокусник может договориться с помощником так, чтобы фокус гарантированно удался? *(К. Кноп, О. Леонтьева)*

11.4. В бесконечной последовательности (x_n) первый член x_1 — рациональное число, большее 1, и $x_{n+1}=x_n+\frac{1}{[x_n]}$ при всех натуральных n. Докажите, что в этой последовательности есть целое число. *(А. Голованов)*

Решения задач

8 класс

8.1. Так как $(b-c)+(c-a)+(a-b)=0$, то одно из слагаемых неположительно; пусть для определенности это $b-c$. Тогда дискриминант первого уравнения $(a-b)^2-4(b-c)\geqslant 0$, то есть оно имеет решение.

8.2. Разделим таблицу вертикальной линией m пополам. В одной из половин, например в правой, окажется не более 25 четных чисел. Такое же количество нечетных чисел окажется в левой половине. Меняя местами пары таких чисел разной четности, не более чем за 25 операций можно получить таблицу, у которой в правой половине все числа — нечетные, а в левой — четные. Сумма чисел в каждой паре соседних клеток в каждой из половин — четное (и большее 2), а потому составное число.

Простыми могут оказаться только суммы чисел в соседних клетках l_j и r_j из разных половин, примыкающих к линии m. Будем теперь менять местами числа только из правой половины так, чтобы суммы чисел в парах клеток (l_j, r_j) $(j=1,2,\ldots,10)$ стали делиться на три. Это можно сделать, так как в правой половине не менее, чем по 16 чисел дают остатки 0, 1 и 2 при делении на три, а для требуемой перестановки может потребоваться не более, чем по 10 чисел, дающих эти остатки. Полученная не более чем за $25+10=35$ операций таблица — искомая.

8.3. Обозначим через R точку пересечения PB, QC и AM (см. рис. 1). Заметим, что $PM \parallel AC$, $MQ \parallel BD$, поэтому четырехугольники $PMCA$ и $QMBD$ — параллелограммы. Значит, $MC=PA$, $BM=DQ$ и $PQ = PA+AD+DQ = MC+AD+BM=2BC$. Так как $BC \parallel PQ$ и $BC=\frac{1}{2}PQ$, то BC — средняя линия треугольника PRQ. Значит, и BM — средняя линия треугольника ARP. Тогда $MC=PA=2BM$.

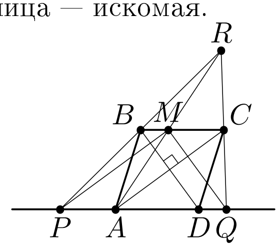

Рис. 1

8.4. Приведем один из возможных вариантов договоренности.

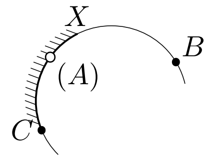

Рис. 2

Рассмотрим 2007 дуг, на которые разбили окружность отмеченные точки. Пусть $\overset{\smile}{AB}$ — наибольшая из них (если их несколько, то возьмем любую), и пусть эта дуга лежит по часовой стрелке от точки A (и против часовой — от точки B). Тогда помощник должен стереть точку A.

Покажем, что фокусник сможет указать полуокружность, на которой находилась стертая точка. Войдя в комнату, он увидит окружность, разбитую на 2006 дуг. Ясно, что стертая точка будет находиться на наибольшей из дуг (она уже единственна, так как наибольшая дуга после стирания ее конца увеличилась). Более того, если сейчас наибольшая дуга — $\overset{\smile}{CB}$ (и она находится по часовой стрелке от C), то $\overset{\smile}{AB}\geqslant\overset{\smile}{CA}$ (см. рис. 2). Поэтому, если X — середина $\overset{\smile}{CB}$, то A лежит на $\overset{\smile}{CX}$. Поэтому фокусник может выделить полуокружность, находящуюся по часовой стрелке от C (она содержит $\overset{\smile}{CX}$).

9 класс

9.1. Если какой-то из трехчленов $f(x)$ или $g(x)$ (скажем, $f(x)$) не имеет корней, то $f(x)>0$ для любого x, поэтому и $f(f(x))>0$ для любого x, и утверждение доказано. Пусть оба трехчлена имеют корни. Не умаляя общности можно считать, что минимальное значение $f(x)$ не превосходит минимального значения $g(x)$. Из условия на многочлен $g(f(x))$ следует, что минимальное значение $f(x)$ больше любого корня $g(x)$ (действительно, если $g(a)=0$ и в некоторой точке $f(x_1)\leqslant a$, то найдется x_2 такое, что $f(x_2)=a$; тогда $g(f(x_2))=0$, что невозможно). Тогда и минимальное значение $g(x)$ больше любого корня $g(x)$. Поэтому уравнение $g(g(x))=0$ не может иметь вещественных корней.

9.2. Пусть вначале в сумму входила дробь $a/2$. Докажем, что в исходной сумме найдется такая дробь b/c с нечетным знаменателем c, что числа a и b имеют разную четность. Действительно,