Материалы для проведения

V-го этапа
XXXIII ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2006–2007 учебный год

Второй день

Майкоп,
23–28 апреля 2007 г.

Москва, 2007

Сборник содержит материалы для проведения V (заключительного) этапа XXXIII Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической Комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н.Х. Агаханов, А.В. Акопян, В.В. Астахов, А.И. Бадзян, С.Л. Берлов, И.И. Богданов, С.Г. Волченков, А.А. Гаврилюк, А.И. Гарбер, Р.А. Гимадеев, А.А. Глазырин, А.С. Голованов, В.Л. Дольников, Л.А. Емельянов, Г.М. Иванов, М.И. Исаев, Р.Н. Карасев, Д.В. Карпов, М.А. Козачок, П.Ю. Козлов, А.Н. Магазинов, П.В. Мартынов, Ю.С. Мешин, М.В. Мурашкин, А.В. Пастор, О.К. Подлипский, И.С. Рубанов, В.А. Сендеров, К.А. Сухов, Д.А. Терешин, С.И. Токарев, В.П. Филимонов, А.И. Храбров, Г.Р. Челноков, К.В. Чувилин.

В скобках после каждой задачи указана фамилия ее автора.

Компьютерный макет: И.И. Богданов, А.В. Полозов.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

нами число ребер больше $2k-2$, то требуемая покраска невозможна. Таким образом, верно и утверждение, обратное утверждению задачи.

Условия задач

8 класс

8.5. От Майкопа до Белореченска 24 км. Три друга должны добраться: двое из Майкопа в Белореченск, а третий — из Белореченска в Майкоп. У них есть один велосипед, первоначально находящийся в Майкопе. Каждый из друзей может идти (со скоростью не более 6 км/час) и ехать на велосипеде (со скоростью не более 18 км/час). Оставлять велосипед без присмотра нельзя. Докажите, что через 2 часа 40 минут все трое друзей могут оказаться в пунктах назначения. Ехать на велосипеде вдвоем нельзя. (*Фольклор*)

8.6. Через точку I пересечения биссектрис треугольника ABC проведена прямая, пересекающая стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Треугольник BMN оказался остроугольным. На стороне AC выбраны точки K и L так, что $\angle ILA = \angle IMB$, $\angle IKC = \angle INB$. Докажите, что $AM + KL + CN = AC$. (*С. Берлов*)

8.7. Для натурального $n > 3$ будем обозначать через $n?$ (n-вопросиал) произведение всех простых чисел, меньших n. Решите уравнение $n? = 2n + 16$. (*В. Сендеров*)

8.8. В таблице 10×10 расставлены числа от 1 до 100: в первой строчке — от 1 до 10 слева направо, во второй — от 11 до 20 слева направо и т. д. Андрей собирается разрезать таблицу на прямоугольники 1×2, посчитать произведение чисел в каждом прямоугольнике и сложить полученные 50 чисел. Он стремится получить как можно меньшую сумму. Как ему следует разрезать квадрат? (*А. Бадзян*)

9 класс

9.5. В каждой вершине выпуклого 100-угольника написано по два различных числа. Докажите, что можно вычеркнуть по одному числу в каждой вершине так, чтобы оставшиеся числа в любых двух соседних вершинах были различными. *(Ф. Петров)*

9.6. Дан остроугольный треугольник ABC. Точки M и N — середины сторон AB и BC соответственно, точка H — основание высоты, опущенной из вершины B. Описанные окружности треугольников AHN и CHM пересекаются в точке P ($P \neq H$). Докажите, что прямая PH проходит через середину отрезка MN. *(В. Филимонов)*

9.7. В таблице 10×10 расставлены числа от 1 до 100: в первой строчке — от 1 до 10 слева направо, во второй — от 11 до 20 слева направо и т. д. Андрей собирается разрезать таблицу на прямоугольники 1×2, посчитать произведение чисел в каждом прямоугольнике и сложить полученные 50 чисел. Он стремится получить как можно меньшую сумму. Как ему следует разрезать квадрат? *(А. Бадзян)*

9.8. Дима посчитал факториалы всех натуральных чисел от 80 до 99, нашел числа, обратные к ним, и напечатал получившиеся десятичные дроби на 20 бесконечных ленточках (например, на последней ленточке было напечатано число $\frac{1}{99!} = 0,\underbrace{00\ldots00}_{155\text{ нулей}}10715\ldots$). Саша хочет вырезать из одной ленточки кусок, на котором записано N цифр подряд и нет запятой. При каком наибольшем N он сможет это сделать так, чтобы Дима не смог определить по этому куску, какую ленточку испортил Саша? *(А. Голованов)*

10 класс

10.5. Дан набор из $n > 2$ векторов. Назовем вектор набора *длинным*, если его длина не меньше длины суммы остальных векторов набора. Докажите, что если каждый вектор набора — длинный, то сумма всех векторов набора равна нулю. *(Н. Агаханов)*

10.6. Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Пусть PQ и RS — отрезки общих внешних касательных к этим окружностям (точки P и R лежат на ω_1, точки Q и S — на ω_2). Оказа-

принадлежат критическому множеству. Если же вершины b и c принадлежат критическому множеству A_1, а вершины c и d — критическому множеству A_2, то $A_1 \cup A_2$ — тоже критическое (ибо $c \in A_1 \cap A_2$). Но тогда, добавив к этому множеству вершину a, мы добавим к его внутренним ребрам три ребра; следовательно, полученное множество противоречит условию задачи.

Второе решение. Покажем, как можно по-другому (без использования леммы) завершить решение задачи. Так же, как и в первом решении, рассмотрим вершину a степени 3 и критическое подмножество V, содержащее двух ее соседей, но не ее саму.

Выкинем из нашего графа G все вершины множества V и добавим новую вершину v, причем для каждого ребра, соединяющего вершину V с вершиной не из V, соединим v с этой внешней вершиной (см. рис. 9). (Такая операция называется стягиванием подграфа V.) Покажем, что новый граф G' также удовлетворяет условию. Рассмотрим произвольное множество D из d его вершин. Если среди $v \notin D$, то число ребер между ними такое же, как было в графе G, т. е. не больше $2d-2$. Если же $v \in D$, то рассмотрим множество $D \cup V \setminus \{v\}$ из $(d+k-1)$ вершин графа G; среди них не больше $2d+2k-4$ ребер, из них ровно $2k-2$ ребер между вершинами V; значит, остальных ребер не больше $2d-2$, что и требовалось.

Ребра графа на вершинах множества V можно покрасить требуемым образом; покрасим также таким образом ребра G' (в обоих полученных графах меньше, чем по n вершин!). В графе G каждое ребро соответствует ребру в одном из двух графов — G' или V. Покрасим это ребро так же, как соответствующее ему ребро в этих графах. Покажем, что не появилось одноцветных циклов. Пусть это не так. Ясно, что каждый цикл проходит как по вершинам множества V, так и по другим вершинам. Поэтому можно выйти по ребру из вершины множества V, пройти по нескольким (больше одного!) одноцветным ребрам и впервые придти снова в вершину множества V. Это снова означает наличие цикла в новом графе — противоречие.

Замечание. Заметим, что если между какими-то $k| вершин-

Замечание. Заметим, что в условиях леммы множество C также будет критическим.

Перейдем к решению задачи. Предположим противное. Рассмотрим граф с минимальным числом вершин n, для которого утверждение задачи не выполняется. Рассмотрим все его вершины. Число ребер между ними не больше $2n-2$. Если степень каждой вершины не меньше 4, то общее количество ребер не меньше $4 \cdot n/2 = 2n > 2n-2$, что невозможно. Значит, найдется вершина a степени не больше 3. Если ее степень меньше 3, то выкинем ее; ребра оставшегося графа можно покрасить требуемым образом, так как он, очевидно, удовлетворяет условию. Покрасив после этого ребра из вершины a в разные цвета, мы, очевидно, не образуем одноцветных циклов, и требуемая раскраска получена.

Итак, степень a равна 3, и она соединена с вершинами b, c, d. Все три вершины b, c, d не могут совпадать, так как иначе между 2 вершинами a и b было бы больше $2 \cdot 2 - 2$ ребер, что невозможно. Тогда среди b, c и d есть вершина, отличная от обеих остальных — пусть это вершина c.

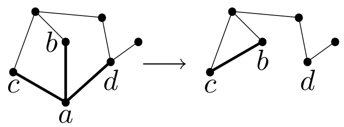

Рис. 8

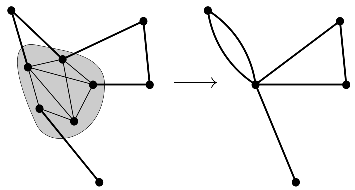

Рис. 9

Выбросим из графа вершину a. Если в оставшемся графе пара вершин b и c не принадлежит одновременно никакому критическому подмножеству, то после добавления «фиктивного» ребра (b, c) мы получим граф, удовлетворяющий условию задачи, число вершин в котором меньше, чем в нашем (см. рис. 8). Покрасим его ребра требуемым образом, потом удалим добавленное ребро, вернем вершину a, и покрасим ребра (a, b) и (a, c) в цвет «фиктивного» ребра, а ребро (a, d) в другой. Очевидно, одноцветных циклов не появится.

Аналогично можем поступить, если c и d одновременно не

лось, что $RB \parallel PQ$. Луч RB вторично пересекает ω_2 в точке W. Найдите отношение RB/BW. *(С. Берлов)*

10.7. У выпуклого многогранника одна вершина A имеет степень 5, а все остальные — степень 3 (степенью вершины называется количество выходящих из нее ребер). Назовем раскраску ребер многогранника в синий, красный и лиловый цвета *хорошей*, если для любой вершины степени 3 все выходящие из нее ребра покрашены в разные цвета. Оказалось, что количество хороших раскрасок не делится на 5. Докажите, что в одной из хороших раскрасок какие-то три последовательных ребра, выходящие из A, покрашены в один цвет. *(Д. Карпов)*

10.8. Дима посчитал факториалы всех натуральных чисел от 80 до 99, нашел числа, обратные к ним, и напечатал получившиеся десятичные дроби на 20 бесконечных ленточках (например, на последней ленточке было напечатано число $\frac{1}{99!} = 0{,}\underbrace{00\ldots00}_{155\text{ нулей}}10715\ldots$). Саша хочет вырезать из одной ленточки кусок, на котором записано N цифр подряд и нет запятой. При каком наибольшем N он сможет это сделать так, чтобы Дима не смог определить по этому куску, какую ленточку испортил Саша? *(А. Голованов)*

11 класс

11.5. В каждой вершине выпуклого 100-угольника написано по два различных числа. Докажите, что можно вычеркнуть по одному числу в каждой вершине так, чтобы оставшиеся числа в любых двух соседних вершинах были различными. *(Ф. Петров)*

11.6. Существуют ли ненулевые числа a, b, c такие, что при любом $n > 3$ можно найти многочлен вида $P_n(x) = x^n + \ldots + ax^2 + bx + c$, имеющий ровно n (не обязательно различных) целых корней? *(Н. Агаханов, И. Богданов)*

11.7. Дана треугольная пирамида. Леша хочет выбрать два ее скрещивающихся ребра и на них, как на диаметрах, построить шары. Всегда ли он может выбрать такую пару, что любая точка пирамиды лежит хотя бы в одном из этих шаров? *(А. Заславский)*

11.8. В стране есть N городов. Некоторые пары из них соединены беспосадочными двусторонними авиалиниями. Оказалось, что для любого k $(2 \leqslant k \leqslant N)$ при любом выборе k городов количество авиалиний между этими городами не будет превосходить $2k-2$. Докажите, что все авиалинии можно распределить между двумя авиакомпаниями так, что не будет замкнутого авиамаршрута, в котором все авиалинии принадлежат одной компании.

(*И. Богданов, Г. Челноков*)

BA_1 и CD_1 перекрываются, а значит, они покрывают весь отрезок BC. Но наши шары как раз покрывают оба этих отрезка.

Поскольку шары покрывают все ребра, то они покрывают и все грани. Пусть теперь какая-то точка X тетраэдра не покрыта шарами. Тогда из нее можно выпустить луч, не имеющий общих точек с шарами. Однако он пересечет поверхность в точке, принадлежащей одному из шаров — противоречие.

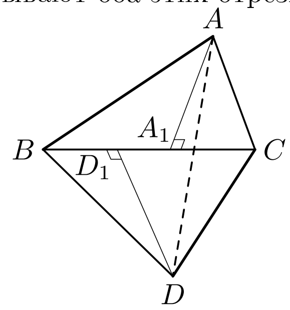

Рис. 7

11.8. **Первое решение.** Рассмотрим граф, вершины которого — это города, а ребра — авиалинии. Обобщим задачу — разрешим графу иметь кратные ребра. Тогда для любого набора, скажем, из k вершин, количество ребер между ними не превосходит $2k-2$. Требуется доказать, что можно покрасить ребра графа в два цвета так, чтобы не было одноцветных циклов.

Назовем непустое подмножество A вершин графа *критическим*, если количество ребер графа между вершинами множества A — ровно $2|A|-2$.

Лемма. *Если A и B — критические подмножества, причем $A \cap B \neq \varnothing$, то $A \cup B$ — тоже критическое.*

Доказательство. Пусть $C = A \cap B$, $D = A \cup B$ и D — не критическое. Пусть $|A| = a$, $|B| = b$, $|C| = c$, $|D| = d = a+b-c$. Так как количество ребер в A равно $2a-2$, а количество ребер в D меньше, чем $2d-2$, то число ребер, соединяющих вершины из D, у которых не оба конца лежат в A, меньше $(2d-2)-(2a-2) = 2(d-a) = 2(b-c)$. В частности, в число этих ребер входят все ребра, соединяющие вершины B, не обе из которых лежат в C. Поэтому их число также меньше $2(b-c)$, а число остальных ребер среди вершин B — больше $(2b-2)-2(b-c) = 2c-2$. Но это в точности ребра, соединяющие вершины множества C; значит, C не удовлетворяет условию задачи — противоречие. Лемма доказана.

11 класс

11.5. См. решение задачи 9.5.

11.6. **Ответ.** Не существуют.

Пусть такие числа a, b, c нашлись. Тогда они целые в силу теоремы Виета; кроме того, при каждом $n > 3$ одно из чисел c или $-c$ является произведением всех корней многочлена $P_n(x)$, т. е. произведением n целых чисел. Для каждого построенного многочлена $P_n(x)$ рассмотрим все его корни, отличные от ±1; их произведение равно $\pm c$. У чисел c и $-c$ конечное число разложений на множители, отличные по модулю от единицы; значит, какое-то из таких разложений встретится бесконечное число раз. Рассмотрим последовательность многочленов с таким разложением. Они различаются между собой только дополнительными корнями, равными $+1$ и -1.

Рассмотрим два таких многочлена $P_m(x)$ и $P_k(x)$ степеней $m > k$. Из теоремы Виета получаем, что сумма чисел, обратных к корням каждого из этих многочленов, равна $-b/c$. Эти суммы различаются лишь наличием нескольких слагаемых вида 1 и -1; ясно, что у P_m по сравнению с P_k добавились равные количества таких корней, т. е.

$$P_m(x) = P_k(x)(x-1)^d(x+1)^d = P_k(x)(x^2-1)^d. \qquad (2)$$

Заметим, что $(x^2-1)^d = x^{2d} - \ldots + (-1)^{d-1}dx^2 + (-1)^d$. Тогда, сравнив свободные члены и коэффициенты при x^2 в левой и правой частях равенства (2), получаем $c = c\cdot(-1)^d$ (откуда d четно) и $a = a\cdot(-1)^d + c\cdot(-1)^{d-1}d = a - cd$; последнее невозможно, так как $cd \neq 0$. Противоречие.

11.7. Пусть дана пирамида $ABCD$. Выберем пару ее скрещивающихся ребер с наибольшей суммой квадратов — пусть это AB и CD. Покажем, что шары с диаметрами AB и CD покрывают каждое ребро пирамиды. Ясно, что достаточно доказать это для ребра BC. Рассмотрим основания A_1 и D_1 перпендикуляров, опущенных соответственно из A и D на BC. Тогда $AB^2+CD^2 = AA_1^2 + BA_1^2 + DD_1^2 + CD_1^2 \geqslant AC^2 + BD^2 = AA_1^2 + CA_1^2 + DD_1^2 + BD_1^2$, откуда $BA_1^2 + CD_1^2 \geqslant CA_1^2 + BD_1^2$. Это означает, что отрезки

Решения задач

8 класс

8.5. В течение $24 : (18 + 6) = 1$ часа все движутся навстречу друг другу (первый — на велосипеде), при этом первый и третий друзья встретятся и первый передаст велосипед третьему. В этот момент второй, прошедший 6 км, должен остановиться и дожидаться третьего, едущего к нему навстречу на велосипеде. Первый в это время тоже может отдохнуть. Третий через $(24 - 6 - 6) : 18 = 2/3$ часа доедет до стоящего второго и передаст ему велосипед. После этого второй доедет до Белореченска, третий дойдет до Майкопа, а первый — до Белореченска за 1 час. Всего с начала движения прошло $1 + 2/3 + 1$ часов, т. е. 2 часа 40 минут.

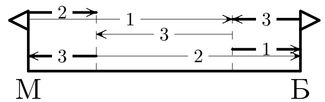

Рис. 1

Замечание. Можно показать, что за меньшее время все трое добраться не смогут.

8.6. Опустим из точки I на стороны AB, BC, CA перпендикуляры IC_1, IA_1, IB_1 соответственно (см. рис. 2). Очевидно, эти перпендикуляры равны по длине; кроме того, $AC_1 = AB_1$ и $CA_1 = CB_1$ как отрезки касательных ко вписанной окружности, проведенных из одной точки. Тогда и прямоугольные треугольники IKB_1 и INA_1 равны по катету и противолежащему острому углу, поэтому $B_1K = A_1N$. Аналогично, $B_1L = C_1M$. Следовательно $AM + KL + CN = AM + MC_1 + NA_1 + CN = AC_1 + CA_1 = AB_1 + CB_1 = AC$.

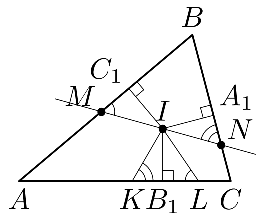

Рис. 2

Замечание. Утверждение задачи верно и в случае, когда треугольник BMN тупоугольный.

8.7. **Ответ.** 7.

Имеем

$$n? - 32 = 2(n-8). \qquad (1)$$

Так как $n?$ не делится на 4, то из (1) следует, что $n-8$ нечетно. Пусть $n > 9$, тогда $n-8$ имеет нечетный простой делитель p. Так как $p < n$, то $n?$ делится на p. Значит, 32 делится на p, что невозможно.

Мы получили, что $n \leqslant 9$ и нечетно. При $n = 9$ имеем $n? = 210 > 2 \cdot 9 + 16$. Число $n = 7$ — корень нашего уравнения, а при $n = 5$ имеем $n? = 6 < 16$.

8.8. Пронумеруем прямоугольники разбиения. Пусть в i-м прямоугольнике лежат числа a_i и b_i. Заметим, что $a_ib_i = \frac{a_i^2 + b_i^2}{2} - \frac{(a_i - b_i)^2}{2}$. Просуммировав эти равенства по всем прямоугольникам, получаем, что сумма всех 50 произведений равна

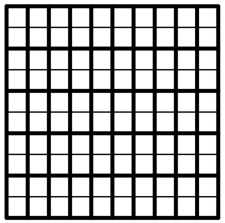

Рис. 3

$$S = \frac{a_1^2 + \ldots + a_{50}^2 + b_1^2 + \ldots + b_{50}^2}{2} - \frac{(a_1 - b_1)^2 + \ldots + (a_{50} - b_{50})^2}{2}.$$

Заметим, что первая дробь равна $\frac{1^2 + \ldots + 100^2}{2}$, т. е. не зависит от разбиения. В числителе же второй дроби каждый квадрат равен либо 1^2, либо 10^2 — в зависимости от того, горизонтален или вертикален i-й прямоугольник. Поэтому вторая дробь будет максимальна (а итоговая сумма — минимальна) тогда, когда все слагаемые в числителе будут равняться 100, т. е. когда все прямоугольники будут вертикальны.

9 класс

9.5. Пусть в любой вершине стоят одни и те же числа a и b; тогда достаточно оставить в вершинах с четными номерами число a, а в вершинах с нечетными — число b. Пусть это не так. Тогда

ет, что граф распался на несколько циклов, причем два из них пересекаются только по вершине A, а остальные не пересекаются вовсе. Рассмотрим цикл, проходящий через A и содержащий AB_2; тогда он содержит еще и синее ребро, выходящее из A. Перекрасим синие ребра этого цикла — в красные и наоборот. Тогда мы получили другую хорошую раскраску.

При этом возможны три случая (см. рис. 6). Если цикл содержит синее ребро AB_1 или AB_4, то после перекраски три последовательных ребра (AB_2, AB_3, AB_4 или AB_1, AB_2, AB_3) окрашены в синий цвет; это невозможно по предположению. Значит, в цикле есть ребро AB_3, и после перекрашивания получилась раскраска, в которой красное и лиловое ребра — AB_3 и AB_5. При этом из разных раскрасок после перекрашивания получались разные, так как исходная раскраска восстанавливается по новой аналогичной процедурой. Поэтому $k_{25} \leqslant k_{53}$, что и требовалось.

Замечание 1. Легко видеть, что мы нигде не пользовались специфическими особенностями многогранника. Зафиксировав некоторую (вообще говоря, произвольную) циклическую нумерацию B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 соседей вершины A, мы доказали существование хорошей раскраски, в которой в один цвет покрашены три ребра, идущих из A к последовательным в этой нумерации вершинам.

Замечание 2. Вернемся, однако, к задаче с многогранником. Предположим, что в нашем многограннике есть хорошие раскраски, но откажемся от условия, что их количество не кратно 5. Сделаем еще более смелое предположение, что нам в таких условиях удалось доказать наличие хорошей раскраски, в которой три последовательных ребра, выходящие из A, покрашены в один и тот же цвет. Отсюда без труда выводится самое известное (без преувеличения!) утверждение в теории графов — гипотеза четырех красок.

10.8. **Ответ.** При $N = 155$.

См. решение задачи 9.8.

10.7. Рассмотрим произвольную хорошую раскраску. Заметим, что общее число концов ребер каждого цвета четно; при этом в каждой вершине степени 3 количество концов каждого цвета имеет одинаковую четность (их там по одному). Поэтому и в вершине A четность их количеств также одинакова; тогда все они нечетны, и в ней сходится три ребра одного цвета и по одному ребру остальных.

Предположим, что утверждение задачи не выполнено, т. е. нет хорошей раскраски с тремя последовательными ребрами одного цвета, выходящими из одной вершины. Докажем, что количество хороших раскрасок, в которых из A выходит три синих ребра, делится на 5. Тогда, очевидно, и общее количество раскрасок будет делиться на 5, что противоречит условию.

Пусть из вершины A последовательно выходят ребра AB_1, AB_2, AB_3, AB_4 и AB_5 (далее по циклу опять идет ребро AB_1). В любой раскраске красное и лиловое ребра из A идут не подряд (иначе и три синих ребра идут подряд). Следовательно, для концов красного и лилового ребер есть 5 вариантов: (B_1, B_4), (B_2, B_5), (B_3, B_1), (B_4, B_2), (B_5, B_3); обозначим соответствующие количества раскрасок через k_{14}, k_{25}, k_{31}, k_{42}, k_{53}. Мы докажем, что $k_{14} \leqslant k_{42} \leqslant k_{25} \leqslant k_{53} \leqslant k_{31} \leqslant k_{14}$, откуда будет следовать, что все 5 чисел равны, а общее количество раскрасок делится на 5.

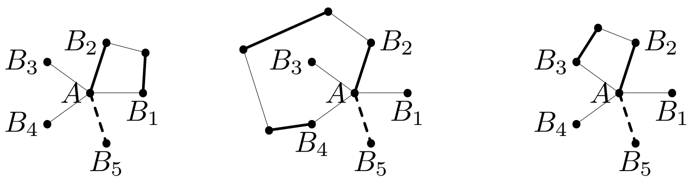

Рис. 6

Покажем, что $k_{25} \leqslant k_{53}$ (остальные неравенства аналогичны). Пусть в некоторой раскраске ребра AB_2 и AB_5 — не синие (пусть для определенности AB_2 красное). Рассмотрим граф, вершинами которого являются вершины многогранника, а ребрами — синие и красные ребра. Тогда степень вершины A равна 4, а степени остальных вершин — по 2. Отсюда сразу следу-

пронумеруем вершины по порядку от 1 до 100 так, чтобы в вершинах 1 и 100 стояли разные пары чисел.

Покрасим все поставленные числа в красный и синий цвета следующим образом. Числа в первой вершине окрасим в разные цвета. Пусть в k-й вершине числа a и b окрашены в красный и синий цвета соответственно. Тогда, как нетрудно видеть, в $(k + 1)$-й вершине можно покрасить числа так, чтобы одноцветные числа в k-й и $(k + 1)$-й вершинах различались. Таким образом мы покрасим все числа; при этом в любой паре соседних вершин, кроме $(1, 100)$, одноцветные числа будут различны. Рассмотрим вершины 1 и 100. Если в них равны красные числа и равны синие числа, то в этих вершинах стоит одна и та же пара чисел, что не так. Пусть синие числа в этих вершинах различны. Тогда, стерев во всех вершинах красные числа, мы получим требуемое.

9.6. Пусть прямая MN вторично пересекает описанные окружности ω_1 и ω_2 треугольников AHN и CHM в точках D и E, а прямую PH — в точке S. Поскольку HN — медиана прямоугольного треугольника BHC, то $HN = CN$ и $\angle NHC = \angle NCH$. Из параллельности хорд ME и HC окружности ω_2 следует, что четырехугольник $MHCE$ — равнобокая трапеция, поэтому $HM = CE$ и $\angle MHC = \angle ECH$. Следовательно, $\angle MHN = \angle MHC - \angle NHC = \angle ECH - \angle NCH = \angle ECN$. Значит, $\triangle MHN = \triangle ECN$ по двум сторонам и углу между ними, откуда $NE = MN$. Аналогично $DM = MN$. Обозначим длину этих трех отрезков через a, а длины отрезков MS и NS через x и y. Из вписанности четырехугольников $DHNP$ и $MHEP$ получаем $MS \cdot SE = PS \cdot SH = NS \cdot SD$, откуда $x(a+y) = y(a+x)$, т. е. $ax = ay$. Таким образом, S — середина MN, что и требовалось.

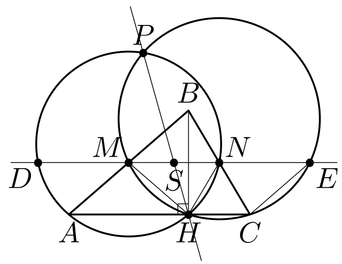

Рис. 4

Замечание. Утверждение задачи остается в силе, даже если отказаться от требования остроугольности $\triangle ABC$. Доказательство в этом случае полностью аналогично изложенному.

9.7. **Ответ.** На 50 вертикальных прямоугольников (см. рис. 3).

См. решение задачи 8.8.

9.8. **Ответ.** $N = 155$.

Пусть на ленточках, на которых записаны числа $\frac{1}{k!}$ и $\frac{1}{l!}$ ($k < l$), нашлось по одинаковому куску из N подряд стоящих цифр. Домножим числа $\frac{1}{k!}$ и $\frac{1}{l!}$ на степени 10 так, чтобы одинаковые куски оказались сразу после десятичной запятой. Дробные части получившихся дробей $\frac{10^a}{k!}$ и $\frac{10^b}{l!}$ не могут совпадать. Действительно, в противном случае число $\frac{10^a}{k!} - \frac{10^b}{l!} = \frac{10^a(k+1)(k+2)\ldots l - 10^b}{l!}$ целое; следовательно, числитель последней дроби делится на l. Тогда на l делится и число 10^b. С другой стороны, ни одно число от 81 до 99 не является делителем числа вида 10^b, так как каждое из этих чисел содержит в своем разложении на множители хотя бы одно простое число, отличное от 2 и 5.

Рассматриваемые нами дробные части $\left\{\frac{10^a}{k!}\right\}$ и $\left\{\frac{10^b}{l!}\right\}$ могут быть записаны как обыкновенные дроби со знаменателями $k!$ и $l!$, а потому — и как дроби со знаменателем $99!$, который делится на все числа $80!, 81!, \ldots, 99!$; следовательно, их разность есть разность двух неравных дробей со знаменателем $99!$, и она не меньше $\frac{1}{99!}$.

С другой стороны, две правильные десятичные дроби, у которых совпадают первые N цифр после запятой, отличаются меньше, чем на $\frac{1}{10^N}$. Таким образом, $\frac{1}{99!} < \frac{1}{10^N}$. Из условия следует, что $\frac{1}{99!} > \frac{1}{10^{156}}$, поэтому $N < 156$.

Таким образом, куска из 156 знаков всегда достаточно для того, чтобы определить, из какой полоски он вырезан. С другой стороны, на полосках с числами $\frac{1}{98!}$ и $\frac{1}{99!}$ есть одинаковые куски по 155 знаков: $\frac{1}{99!} = 0{,}\underbrace{00\ldots00}_{155\text{ нулей}}10715\ldots$, а $\frac{1}{98!} = \frac{99}{99!} = \frac{100}{99!} - \frac{1}{99!} =$

$= 0{,}\underbrace{00\ldots00}_{153\text{ нуля}}10715\ldots - 0{,}\underbrace{00\ldots00}_{153\text{ нуля}}00107\ldots = 0{,}\underbrace{00\ldots00}_{153\text{ нуля}}106\ldots$, то есть на обеих полосках есть кусок $\underbrace{00\ldots00}_{153\text{ нуля}}10$.

10 класс

10.5. **Первое решение.** Пусть сумма $\vec{\sigma}$ всех векторов отлична от нуля ($|\vec{\sigma}| = s > 0$). Введем прямоугольную систему координат Oxy, в которой ось Ox сонаправлена с $\vec{\sigma}$. Пусть $\vec{a}$ — длинный вектор набора, т. е. он не короче, чем $\vec{b} = \vec{\sigma} - \vec{a}$. Поскольку y-координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны по модулю, то x-координата a_x вектора $\vec{a}$ по модулю не меньше, чем x-координата $b_x = s - a_x$ вектора $\vec{b}$. Отсюда получаем, что $a_x \geqslant s/2$. Теперь, если все векторы набора длинные, то сумма их x-координат не меньше $ns/2 > s$, но эта сумма равна s. Противоречие.

Второе решение. Обозначим данные векторы через a_k ($k = 1, \ldots, n$), а их сумму через $\vec{\sigma}$. По условию $|\vec{a}_k| \geqslant |\vec{\sigma} - \vec{a}_k|$. Возведем это неравенство в квадрат: $\vec{a}_k^2 \geqslant \vec{\sigma}^2 - 2\vec{\sigma}\cdot\vec{a}_k + \vec{a}_k^2$. Просуммировав такие неравенства по всем k от 1 до n, получаем $0 \geqslant n\vec{\sigma}^2 - 2\vec{\sigma}\cdot(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n)$, т. е. $0 \geqslant (n-2)\vec{\sigma}^2$. Значит, $\vec{\sigma} = \vec{0}$.

10.6. Пусть X — точка пересечения прямых AB и PQ. Тогда $XP^2 = XA \cdot XB = XQ^2$, т. е. X — середина PQ. Прямые AB и PR параллельны, так как обе эти прямые перпендикулярны линии центров окружностей ω_1 и ω_2. Из условия теперь получаем, что четырехугольник $PXBR$ — параллелограмм, откуда $BR = XP = \frac{1}{2}PQ = \frac{1}{2}RS$ (последнее — из симметрии PQ и RS). Далее, так как RS — отрезок касательной к ω_2, то $RB \cdot RW = RS^2 = (2RB)^2$, откуда $RW = 4RB$. Значит, $RB/BW = 1/3$.

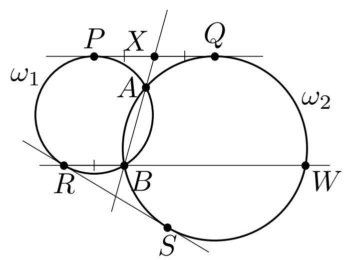

Рис. 5