9 класс

Первый день

9.1. Существуют ли такие 14 натуральных чисел, что при увеличении каждого из них на 1 произведение всех чисел увеличится ровно в 2008 раз?

9.2. Числа a, b, c таковы, что уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ имеет три действительных корня. Докажите, что если $-2 \leqslant a+b+c \leqslant 0$, то хотя бы один из этих корней принадлежит отрезку $[0, 2]$.

9.3. В неравнобедренном треугольнике ABC точки H и M — точки пересечения высот и медиан соответственно. Через вершины A, B и C проведены прямые, перпендикулярные прямым AM, BM, CM соответственно. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника, образованного проведенными прямыми, лежит на прямой MH.

9.4. В НИИЧАВО работают несколько научных сотрудников. В течение 8-часового рабочего дня сотрудники ходили в буфет, возможно по нескольку раз. Известно, что для каждых двух сотрудников суммарное время, в течение которого в буфете находился ровно один из них, оказалось не менее x часов ($x > 4$). Какое наибольшее количество научных сотрудников могло работать в этот день в НИИЧАВО (в зависимости от x)?

XXXIV Всероссийская математическая олимпиада школьников

9 класс

Первый день

9.1. Существуют ли такие 14 натуральных чисел, что при увеличении каждого из них на 1 произведение всех чисел увеличится ровно в 2008 раз?

9.2. Числа a, b, c таковы, что уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ имеет три действительных корня. Докажите, что если $-2 \leqslant a+b+c \leqslant 0$, то хотя бы один из этих корней принадлежит отрезку $[0, 2]$.

9.3. В неравнобедренном треугольнике ABC точки H и M — точки пересечения высот и медиан соответственно. Через вершины A, B и C проведены прямые, перпендикулярные прямым AM, BM, CM соответственно. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника, образованного проведенными прямыми, лежит на прямой MH.

9.4. В НИИЧАВО работают несколько научных сотрудников. В течение 8-часового рабочего дня сотрудники ходили в буфет, возможно по нескольку раз. Известно, что для каждых двух сотрудников суммарное время, в течение которого в буфете находился ровно один из них, оказалось не менее x часов ($x > 4$). Какое наибольшее количество научных сотрудников могло работать в этот день в НИИЧАВО (в зависимости от x)?

10 класс

Первый день

10.1. Существуют ли такие 14 натуральных чисел, что при увеличении каждого из них на 1 произведение всех чисел увеличится ровно в 2008 раз?

10.2. Дана таблица $n \times n$, столбцы которой пронумерованы числами от 1 до n. В клетки таблицы расставляются числа $1, \ldots, n$ так, что в каждой строке и в каждом столбце все числа различны. Назовем клетку *хорошей*, если число в ней больше номера столбца, в котором она находится. При каких n существует расстановка, в которой во всех строках одинаковое количество хороших клеток?

10.3. Окружность ω с центром O вписана в угол BAC и касается его сторон в точках B и C. Внутри угла BAC выбрана точка Q. На отрезке AQ нашлась такая точка P, что $AQ \perp OP$. Прямая OP пересекает окружности ω_1 и ω_2, описанные около треугольников BPQ и CPQ, вторично в точках M и N. Докажите, что $OM = ON$.

10.4. Последовательности (a_n) и (b_n) заданы условиями $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $a_{n+1} = \dfrac{1 + a_n + a_n b_n}{b_n}$ и $b_{n+1} = \dfrac{1 + b_n + a_n b_n}{a_n}$. Докажите, что $a_{2008} < 5$.

XXXIV Всероссийская математическая олимпиада школьников

10 класс

Первый день

10.1. Существуют ли такие 14 натуральных чисел, что при увеличении каждого из них на 1 произведение всех чисел увеличится ровно в 2008 раз?

10.2. Дана таблица $n \times n$, столбцы которой пронумерованы числами от 1 до n. В клетки таблицы расставляются числа $1, \ldots, n$ так, что в каждой строке и в каждом столбце все числа различны. Назовем клетку *хорошей*, если число в ней больше номера столбца, в котором она находится. При каких n существует расстановка, в которой во всех строках одинаковое количество хороших клеток?

10.3. Окружность ω с центром O вписана в угол BAC и касается его сторон в точках B и C. Внутри угла BAC выбрана точка Q. На отрезке AQ нашлась такая точка P, что $AQ \perp OP$. Прямая OP пересекает окружности ω_1 и ω_2, описанные около треугольников BPQ и CPQ, вторично в точках M и N. Докажите, что $OM = ON$.

10.4. Последовательности (a_n) и (b_n) заданы условиями $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $a_{n+1} = \dfrac{1 + a_n + a_n b_n}{b_n}$ и $b_{n+1} = \dfrac{1 + b_n + a_n b_n}{a_n}$. Докажите, что $a_{2008} < 5$.

11 класс

Первый день

11.1. Числа a, b, c таковы, что уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ имеет три действительных корня. Докажите, что если $-2 \leqslant a+b+c \leqslant 0$, то хотя бы один из этих корней принадлежит отрезку $[0, 2]$.

11.2. Пете и Васе подарили одинаковые наборы из N гирь, в которых массы любых двух гирь различаются не более, чем в 1,25 раз. Пете удалось разделить все гири своего набора на 10 равных по массе групп, а Васе удалось разделить все гири своего набора на 11 равных по массе групп. Найдите наименьшее возможное значение N.

11.3. Дано конечное множество простых чисел P. Докажите, что найдется натуральное число x такое, что оно представляется в виде $x = a^p + b^p$ (с натуральными a, b) при всех $p \in P$ и не представляется в таком виде для любого простого $p \notin P$.

11.4. Каждую грань тетраэдра можно поместить в круг радиуса 1. Докажите, что весь тетраэдр можно поместить в шар радиуса $\frac{3}{2\sqrt{2}}$.

XXXIV Всероссийская математическая олимпиада школьников

11 класс

Первый день

11.1. Числа a, b, c таковы, что уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ имеет три действительных корня. Докажите, что если $-2 \leqslant a+b+c \leqslant 0$, то хотя бы один из этих корней принадлежит отрезку $[0, 2]$.

11.2. Пете и Васе подарили одинаковые наборы из N гирь, в которых массы любых двух гирь различаются не более, чем в 1,25 раз. Пете удалось разделить все гири своего набора на 10 равных по массе групп, а Васе удалось разделить все гири своего набора на 11 равных по массе групп. Найдите наименьшее возможное значение N.

11.3. Дано конечное множество простых чисел P. Докажите, что найдется натуральное число x такое, что оно представляется в виде $x = a^p + b^p$ (с натуральными a, b) при всех $p \in P$ и не представляется в таком виде для любого простого $p \notin P$.

11.4. Каждую грань тетраэдра можно поместить в круг радиуса 1. Докажите, что весь тетраэдр можно поместить в шар радиуса $\frac{3}{2\sqrt{2}}$.