9 класс

Второй день

9.5. Расстоянием между двумя клетками бесконечной шахматной доски назовем минимальное число ходов в пути короля между этими клетками. На доске отмечены три клетки, попарные расстояния между которыми равны 100. Сколько существует клеток, расстояния от которых до всех трех отмеченных равны 50?

9.6. Вписанная окружность касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках X и Y соответственно. Точка K — середина дуги AB описанной окружности треугольника ABC. Оказалось, что прямая XY делит отрезок AK пополам. Чему может быть равен угол BAC?

9.7. На доске написано натуральное число. Если на доске написано число x, то можно дописать на нее число $2x+1$ или $\frac{x}{x+2}$. В какой-то момент выяснилось, что на доске присутствует число 2008. Докажите, что оно там было с самого начала.

9.8. В нашем распоряжении имеются 3^{2k} неотличимых по виду монет, одна из которых фальшивая — она весит чуть легче настоящей. Кроме того, у нас есть трое двухчашечных весов. Известно, что двое весов исправны, а одни — сломаны (показываемый ими исход взвешивания никак не связан с весом положенных на них монет, т. е. может быть как верным, так и искаженным в любую сторону, причем на разных взвешиваниях — искаженным по-разному). При этом неизвестно, какие именно весы исправны, а какие сломаны. Как определить фальшивую монету за $3k+1$ взвешиваний?

XXXIV Всероссийская математическая олимпиада школьников

9 класс

Второй день

9.5. Расстоянием между двумя клетками бесконечной шахматной доски назовем минимальное число ходов в пути короля между этими клетками. На доске отмечены три клетки, попарные расстояния между которыми равны 100. Сколько существует клеток, расстояния от которых до всех трех отмеченных равны 50?

9.6. Вписанная окружность касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках X и Y соответственно. Точка K — середина дуги AB описанной окружности треугольника ABC. Оказалось, что прямая XY делит отрезок AK пополам. Чему может быть равен угол BAC?

9.7. На доске написано натуральное число. Если на доске написано число x, то можно дописать на нее число $2x+1$ или $\frac{x}{x+2}$. В какой-то момент выяснилось, что на доске присутствует число 2008. Докажите, что оно там было с самого начала.

9.8. В нашем распоряжении имеются 3^{2k} неотличимых по виду монет, одна из которых фальшивая — она весит чуть легче настоящей. Кроме того, у нас есть трое двухчашечных весов. Известно, что двое весов исправны, а одни — сломаны (показываемый ими исход взвешивания никак не связан с весом положенных на них монет, т. е. может быть как верным, так и искаженным в любую сторону, причем на разных взвешиваниях — искаженным по-разному). При этом неизвестно, какие именно весы исправны, а какие сломаны. Как определить фальшивую монету за $3k+1$ взвешиваний?

10 класс

Второй день

10.5. Найдите все такие тройки действительных чисел x, y, z, что $1+x^4 \leqslant 2(y-z)^2$, $1+y^4 \leqslant 2(z-x)^2$, $1+z^4 \leqslant 2(x-y)^2$.

10.6. В неравнобедренном остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1, H — точка пересечения высот, O — центр описанной окружности, B_0 — середина стороны AC. Прямая BO пересекает сторону AC в точке P, а прямые BH и A_1C_1 пересекаются в точке Q. Докажите, что прямые HB_0 и PQ параллельны.

10.7. При каких натуральных $n > 1$ существуют такие натуральные $b_1, \ldots, b_n$ (не все из которых равны), что при всех натуральных k число $(b_1 + k)(b_2 + k) \ldots (b_n + k)$ является степенью натурального числа? (Показатель степени может зависеть от k, но должен быть всегда больше 1.)

10.8. На плоскости нарисовано несколько прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Известно, что каждые два прямоугольника можно пересечь вертикальной или горизонтальной прямой. Докажите, что можно провести одну горизонтальную и одну вертикальную прямую так, чтобы любой прямоугольник пересекался хотя бы с одной из этих двух прямых.

XXXIV Всероссийская математическая олимпиада школьников

10 класс

Второй день

10.5. Найдите все такие тройки действительных чисел x, y, z, что $1+x^4 \leqslant 2(y-z)^2$, $1+y^4 \leqslant 2(z-x)^2$, $1+z^4 \leqslant 2(x-y)^2$.

10.6. В неравнобедренном остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1, H — точка пересечения высот, O — центр описанной окружности, B_0 — середина стороны AC. Прямая BO пересекает сторону AC в точке P, а прямые BH и A_1C_1 пересекаются в точке Q. Докажите, что прямые HB_0 и PQ параллельны.

10.7. При каких натуральных $n > 1$ существуют такие натуральные $b_1, \ldots, b_n$ (не все из которых равны), что при всех натуральных k число $(b_1 + k)(b_2 + k) \ldots (b_n + k)$ является степенью натурального числа? (Показатель степени может зависеть от k, но должен быть всегда больше 1.)

10.8. На плоскости нарисовано несколько прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Известно, что каждые два прямоугольника можно пересечь вертикальной или горизонтальной прямой. Докажите, что можно провести одну горизонтальную и одну вертикальную прямую так, чтобы любой прямоугольник пересекался хотя бы с одной из этих двух прямых.

11 класс

Второй день

11.5. Числа от 51 до 150 расставлены в таблицу 10×10. Может ли случиться, что для каждой пары чисел a, b, стоящих в соседних по стороне клетках, хотя бы одно из уравнений $x^2 - ax + b = 0$ и $x^2 - bx + a = 0$ имеет два целых корня?

11.6. Фокусник отгадывает площадь выпуклого 2008-угольника $A_1A_2 \dots A_{2008}$, находящегося за ширмой. Он называет две точки на периметре многоугольника; зрители отмечают эти точки, проводят через них прямую и сообщают фокуснику меньшую из двух площадей частей, на которые 2008-угольник разбивается этой прямой. При этом в качестве точки фокусник может назвать либо вершину, либо точку, делящую указанную им сторону в указанном им численном отношении. Докажите, что за 2006 вопросов фокусник сможет отгадать площадь многоугольника.

11.7. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Пусть P и Q — точки пересечения лучей BA и CD, BC и AD соответственно, а H — проекция D на PQ. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ является описанным тогда и только тогда, когда вписанные окружности треугольников ADP и CDQ видны из точки H под равными углами.

11.8. В блицтурнире принимали участие $2n + 3$ шахматистов. Каждый сыграл с каждым ровно по одному разу. Для турнира был составлен такой график, чтобы игры проводились одна за другой, и чтобы каждый игрок после сыгранной партии отдыхал не менее n игр. Докажите, что один из шахматистов, игравших в первой партии, играл и в последней.

XXXIV Всероссийская математическая олимпиада школьников

11 класс

Второй день

11.5. Числа от 51 до 150 расставлены в таблицу 10×10. Может ли случиться, что для каждой пары чисел a, b, стоящих в соседних по стороне клетках, хотя бы одно из уравнений $x^2 - ax + b = 0$ и $x^2 - bx + a = 0$ имеет два целых корня?

11.6. Фокусник отгадывает площадь выпуклого 2008-угольника $A_1A_2 \dots A_{2008}$, находящегося за ширмой. Он называет две точки на периметре многоугольника; зрители отмечают эти точки, проводят через них прямую и сообщают фокуснику меньшую из двух площадей частей, на которые 2008-угольник разбивается этой прямой. При этом в качестве точки фокусник может назвать либо вершину, либо точку, делящую указанную им сторону в указанном им численном отношении. Докажите, что за 2006 вопросов фокусник сможет отгадать площадь многоугольника.

11.7. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Пусть P и Q — точки пересечения лучей BA и CD, BC и AD соответственно, а H — проекция D на PQ. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ является описанным тогда и только тогда, когда вписанные окружности треугольников ADP и CDQ видны из точки H под равными углами.

11.8. В блицтурнире принимали участие $2n + 3$ шахматистов. Каждый сыграл с каждым ровно по одному разу. Для турнира был составлен такой график, чтобы игры проводились одна за другой, и чтобы каждый игрок после сыгранной партии отдыхал не менее n игр. Докажите, что один из шахматистов, игравших в первой партии, играл и в последней.