9 класс

Первый день

9.1. Знаменатели двух несократимых дробей равны 600 и 700. Найдите наименьшее возможное значение знаменателя их суммы (в несократимой записи).

9.2. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD (точка D лежит на отрезке AC). Прямая BD пересекает окружность Ω, описанную около треугольника ABC, в точках B и E. Окружность ω, построенная на отрезке DE как на диаметре, пересекает окружность Ω в точках E и F. Докажите, что прямая, симметричная прямой BF относительно прямой BD, содержит медиану треугольника ABC.

9.3. Дано натуральное $n > 1$. Число $a > n^2$ таково, что среди чисел $a+1$, $a+2$, $\ldots$, $a+n$ есть кратные каждого из чисел n^2+1, n^2+2, $\ldots$, n^2+n. Докажите, что $a > n^4 - n^3$.

9.4. По кругу стоят 100 наперстков. Под одним из них спрятана монетка. За один ход разрешается перевернуть четыре наперстка и проверить, лежит ли под одним из них монетка. После этого их возвращают в исходное положение, а монетка перемещается под один из соседних с ней наперстков. За какое наименьшее число ходов наверняка удастся обнаружить монетку?

XXXV Всероссийская математическая олимпиада школьников

9 класс

Первый день

9.1. Знаменатели двух несократимых дробей равны 600 и 700. Найдите наименьшее возможное значение знаменателя их суммы (в несократимой записи).

9.2. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD (точка D лежит на отрезке AC). Прямая BD пересекает окружность Ω, описанную около треугольника ABC, в точках B и E. Окружность ω, построенная на отрезке DE как на диаметре, пересекает окружность Ω в точках E и F. Докажите, что прямая, симметричная прямой BF относительно прямой BD, содержит медиану треугольника ABC.

9.3. Дано натуральное $n > 1$. Число $a > n^2$ таково, что среди чисел $a+1$, $a+2$, $\ldots$, $a+n$ есть кратные каждого из чисел n^2+1, n^2+2, $\ldots$, n^2+n. Докажите, что $a > n^4 - n^3$.

9.4. По кругу стоят 100 наперстков. Под одним из них спрятана монетка. За один ход разрешается перевернуть четыре наперстка и проверить, лежит ли под одним из них монетка. После этого их возвращают в исходное положение, а монетка перемещается под один из соседних с ней наперстков. За какое наименьшее число ходов наверняка удастся обнаружить монетку?

10 класс

Первый день

10.1. Найдите все такие натуральные n, что при некоторых отличных от нуля действительных числах a, b, c, d многочлен
$$(ax+b)^{1000}-(cx+d)^{1000}$$
после раскрытия скобок и приведения всех подобных слагаемых имеет ровно n ненулевых коэффициентов.

10.2. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD (точка D лежит на отрезке AC). Прямая BD пересекает окружность Ω, описанную около треугольника ABC, в точках B и E. Окружность ω, построенная на отрезке DE как на диаметре, пересекает окружность Ω в точках E и F. Докажите, что прямая, симметричная прямой BF относительно прямой BD, содержит медиану треугольника ABC.

10.3. Сколько раз функция
$$f(x)=\cos x\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{3}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2009}$$
меняет знак на отрезке $\left[0,\frac{2009\pi}{2}\right]$?

10.4. По кругу стоят 2009 целых неотрицательных чисел, не превышающих 100. Разрешается прибавить по 1 к двум соседним числам, причем с любыми двумя соседними числами эту операцию можно проделать не более k раз. При каком наименьшем k все числа гарантированно можно сделать равными?

XXXV Всероссийская математическая олимпиада школьников

10 класс

Первый день

10.1. Найдите все такие натуральные n, что при некоторых отличных от нуля действительных числах a, b, c, d многочлен
$$(ax+b)^{1000}-(cx+d)^{1000}$$
после раскрытия скобок и приведения всех подобных слагаемых имеет ровно n ненулевых коэффициентов.

10.2. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD (точка D лежит на отрезке AC). Прямая BD пересекает окружность Ω, описанную около треугольника ABC, в точках B и E. Окружность ω, построенная на отрезке DE как на диаметре, пересекает окружность Ω в точках E и F. Докажите, что прямая, симметричная прямой BF относительно прямой BD, содержит медиану треугольника ABC.

10.3. Сколько раз функция
$$f(x)=\cos x\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{3}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{x}{2009}$$
меняет знак на отрезке $\left[0,\frac{2009\pi}{2}\right]$?

10.4. По кругу стоят 2009 целых неотрицательных чисел, не превышающих 100. Разрешается прибавить по 1 к двум соседним числам, причем с любыми двумя соседними числами эту операцию можно проделать не более k раз. При каком наименьшем k все числа гарантированно можно сделать равными?

11 класс

Первый день

11.1. В стране некоторые пары городов соединены дорогами, которые не пересекаются вне городов. В каждом городе установлена табличка, на которой указана минимальная длина маршрута, выходящего из этого города и проходящего по всем остальным городам страны (маршрут может проходить по некоторым городам больше одного раза и не обязан возвращаться в исходный город). Докажите, что любые два числа на табличках отличаются не более, чем в полтора раза.

11.2. Последовательность $a_1, a_2, \ldots$ такова, что $a_1 \in (1, 2)$ и $a_{k+1} = a_k + \dfrac{k}{a_k}$ при любом натуральном k. Докажите, что в ней не может существовать более одной пары членов с целой суммой.

11.3. В треугольной пирамиде $ABCD$ все плоские углы при вершинах — не прямые, а точки пересечения высот в треугольниках ABC, ABD, ACD лежат на одной прямой. Докажите, что центр описанной сферы пирамиды лежит в плоскости, проходящей через середины ребер AB, AC, AD.

11.4. На плоскости отмечены все точки с целыми координатами (x, y) такие, что $x^2 + y^2 \leqslant 10^{10}$. Двое играют в игру (ходят по очереди). Первым ходом первый игрок ставит фишку в какую-то отмеченную точку и стирает ее. Затем каждым очередным ходом игрок переносит фишку в какую-то другую отмеченную точку и стирает ее. При этом длины ходов должны все время увеличиваться; кроме того, запрещено делать ход из точки в симметричную ей относительно центра. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из играющих может обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?

XXXV Всероссийская математическая олимпиада школьников

11 класс

Первый день

11.1. В стране некоторые пары городов соединены дорогами, которые не пересекаются вне городов. В каждом городе установлена табличка, на которой указана минимальная длина маршрута, выходящего из этого города и проходящего по всем остальным городам страны (маршрут может проходить по некоторым городам больше одного раза и не обязан возвращаться в исходный город). Докажите, что любые два числа на табличках отличаются не более, чем в полтора раза.

11.2. Последовательность $a_1, a_2, \ldots$ такова, что $a_1 \in (1, 2)$ и $a_{k+1} = a_k + \dfrac{k}{a_k}$ при любом натуральном k. Докажите, что в ней не может существовать более одной пары членов с целой суммой.

11.3. В треугольной пирамиде $ABCD$ все плоские углы при вершинах — не прямые, а точки пересечения высот в треугольниках ABC, ABD, ACD лежат на одной прямой. Докажите, что центр описанной сферы пирамиды лежит в плоскости, проходящей через середины ребер AB, AC, AD.

11.4. На плоскости отмечены все точки с целыми координатами (x, y) такие, что $x^2 + y^2 \leqslant 10^{10}$. Двое играют в игру (ходят по очереди). Первым ходом первый игрок ставит фишку в какую-то отмеченную точку и стирает ее. Затем каждым очередным ходом игрок переносит фишку в какую-то другую отмеченную точку и стирает ее. При этом длины ходов должны все время увеличиваться; кроме того, запрещено делать ход из точки в симметричную ей относительно центра. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из играющих может обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?