

9 класс**Второй день**

9.5. Числа a , b и c таковы, что

$$(a+b)(b+c)(c+a) = abc,$$
$$(a^3 + b^3)(b^3 + c^3)(c^3 + a^3) = a^3 b^3 c^3.$$

Докажите, что $abc = 0$.

9.6. Можно ли раскрасить натуральные числа в 2009 цветов так, чтобы каждый цвет встречался бесконечное число раз, и не нашлось тройки чисел, покрашенных в три различных цвета, таких, что произведение двух из них равно третьему?

9.7. Восемь клеток одной диагонали шахматной доски назовем забором. Ладья ходит по доске, не наступая на одну и ту же клетку дважды и не наступая на клетки забора (промежуточные клетки не считаются посещенными). Какое наибольшее число прыжков через забор может совершить ладья?

9.8. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ имеют равные площади. Всегда ли можно построить при помощи циркуля и линейки треугольник $A_2B_2C_2$, равный треугольнику $A_1B_1C_1$ и такой, что прямые AA_2 , BB_2 и CC_2 будут параллельны?

9 класс**Второй день**

9.5. Числа a , b и c таковы, что

$$(a+b)(b+c)(c+a) = abc,$$
$$(a^3 + b^3)(b^3 + c^3)(c^3 + a^3) = a^3 b^3 c^3.$$

Докажите, что $abc = 0$.

9.6. Можно ли раскрасить натуральные числа в 2009 цветов так, чтобы каждый цвет встречался бесконечное число раз, и не нашлось тройки чисел, покрашенных в три различных цвета, таких, что произведение двух из них равно третьему?

9.7. Восемь клеток одной диагонали шахматной доски назовем забором. Ладья ходит по доске, не наступая на одну и ту же клетку дважды и не наступая на клетки забора (промежуточные клетки не считаются посещенными). Какое наибольшее число прыжков через забор может совершить ладья?

9.8. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ имеют равные площади. Всегда ли можно построить при помощи циркуля и линейки треугольник $A_2B_2C_2$, равный треугольнику $A_1B_1C_1$ и такой, что прямые AA_2 , BB_2 и CC_2 будут параллельны?

10 класс

Второй день

- 10.5. В бесконечной возрастающей последовательности натуральных чисел каждое делится хотя бы на одно из чисел 1005 и 1006, но ни одно не делится на 97. Кроме того, каждые два соседних числа отличаются не более, чем на k . При каком наименьшем k такое возможно?
- 10.6. В королевстве N городов, некоторые пары которых соединены непересекающимися дорогами с двусторонним движением (города из такой пары называются *соседними*). При этом известно, что из любого города можно доехать до любого другого, но невозможно, выехав из некоторого города и двигаясь по различным дорогам, вернуться в исходный город.
- Однажды Король провел такую реформу: каждый из N мэров городов стал снова мэром одного из N городов, но, возможно, не того города, в котором он работал до реформы. Оказалось, что любые два мэра, работавшие в соседних городах до реформы, оказались в соседних городах и после реформы. Докажите, что либо найдется город, в котором мэр после реформы не поменялся, либо найдется пара соседних городов, обменявшихся мэрами.
- 10.7. Окружность с центром I касается сторон AB , BC , AC неравностороннего треугольника ABC в точках C_1 , A_1 , B_1 соответственно. Окружности ω_B и ω_C вписаны в четырехугольники BA_1IC_1 и CA_1IB_1 соответственно. Докажите, что общая внутренняя касательная к ω_B и ω_C , отличная от IA_1 , проходит через точку A .
- 10.8. Даны натуральные числа x и y из отрезка $[2, 100]$. Докажите, что при некотором натуральном n число $x^{2^n} + y^{2^n}$ — составное.

10 класс

Второй день

- 10.5. В бесконечной возрастающей последовательности натуральных чисел каждое делится хотя бы на одно из чисел 1005 и 1006, но ни одно не делится на 97. Кроме того, каждые два соседних числа отличаются не более, чем на k . При каком наименьшем k такое возможно?
- 10.6. В королевстве N городов, некоторые пары которых соединены непересекающимися дорогами с двусторонним движением (города из такой пары называются *соседними*). При этом известно, что из любого города можно доехать до любого другого, но невозможно, выехав из некоторого города и двигаясь по различным дорогам, вернуться в исходный город.
- Однажды Король провел такую реформу: каждый из N мэров городов стал снова мэром одного из N городов, но, возможно, не того города, в котором он работал до реформы. Оказалось, что любые два мэра, работавшие в соседних городах до реформы, оказались в соседних городах и после реформы. Докажите, что либо найдется город, в котором мэр после реформы не поменялся, либо найдется пара соседних городов, обменявшихся мэрами.
- 10.7. Окружность с центром I касается сторон AB , BC , AC неравностороннего треугольника ABC в точках C_1 , A_1 , B_1 соответственно. Окружности ω_B и ω_C вписаны в четырехугольники BA_1IC_1 и CA_1IB_1 соответственно. Докажите, что общая внутренняя касательная к ω_B и ω_C , отличная от IA_1 , проходит через точку A .
- 10.8. Даны натуральные числа x и y из отрезка $[2, 100]$. Докажите, что при некотором натуральном n число $x^{2^n} + y^{2^n}$ — составное.

11 класс**Второй день**

- 11.5. Пусть $1 < a \leq b \leq c$. Докажите, что
- $$\log_a b + \log_b c + \log_c a \leq \log_b a + \log_c b + \log_a c.$$
- 11.6. В некоторых клетках доски 10×10 поставили k ладей, и затем отметили все клетки, которые бьет хотя бы одна ладья (считается, что ладья бьет клетку, на которой стоит). При каком наибольшем k может оказаться, что после удаления с доски любой ладьи хотя бы одна отмеченная клетка окажется не под боем?
- 11.7. На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ выбраны точки A_1 и C_1 соответственно. Отрезки AC_1 и CA_1 пересекаются в точке P . Описанные окружности треугольников AA_1P и CC_1P вторично пересекаются в точке Q , лежащей внутри треугольника ACD . Докажите, что $\angle PDA = \angle QBA$.
- 11.8. Даны натуральные $x, y \in [2, 100]$. Докажите, что при некотором натуральном n число $x^{2^n} + y^{2^n}$ — составное.

11 класс**Второй день**

- 11.5. Пусть $1 < a \leq b \leq c$. Докажите, что
- $$\log_a b + \log_b c + \log_c a \leq \log_b a + \log_c b + \log_a c.$$
- 11.6. В некоторых клетках доски 10×10 поставили k ладей, и затем отметили все клетки, которые бьет хотя бы одна ладья (считается, что ладья бьет клетку, на которой стоит). При каком наибольшем k может оказаться, что после удаления с доски любой ладьи хотя бы одна отмеченная клетка окажется не под боем?
- 11.7. На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ выбраны точки A_1 и C_1 соответственно. Отрезки AC_1 и CA_1 пересекаются в точке P . Описанные окружности треугольников AA_1P и CC_1P вторично пересекаются в точке Q , лежащей внутри треугольника ACD . Докажите, что $\angle PDA = \angle QBA$.
- 11.8. Даны натуральные $x, y \in [2, 100]$. Докажите, что при некотором натуральном n число $x^{2^n} + y^{2^n}$ — составное.