Суммы степеней и числа Бернулли: после промежуточного финиша

Ещё о мультиномиальных коэффициентах

Никто не пытался предложить интерпретации для $\ldots$–номиальных коэффициентов. Следующие две задачи содержат довольно забавные интерпретации.

19. (Гипотеза Фримана Дайсона) Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — неотрицательные целые числа. Докажите, что свободный член в $\prod_{1\leqslant i\neq j\leqslant n}(1-\frac{x_j}{x_i})^{a_j}$ равен $\binom{a_1+\ldots+a_n}{a_1,\ldots,a_n}$.

20$^\diamondsuit$**.** Докажите, что $\binom{n}{k}_q$ совпадает с числом k–мерных подпространств в n–мерном пространстве над конечным полем $\mathbb{F}_q$.

Известно ли Вам решение, не использующее «Суммы степеней и ... »?

Вам предлагается не только попробовать найти элементарное решение, но и предлагать свои задачи ...

21. (предложена О. Гольбергом и М. Левиным) Пусть n — целое число, а p — простое число, большее 2. Докажите, что $\sum\limits_{k>0}\binom{2n+1}{k(p-1)}$ делится на p. (Удобно считать, что $\binom{n}{k}=0$ при $n<k$.)

ζ–функция: вещественная и p–адическая

В следующих задачах представлены некоторые результаты, касающиеся так называемой ζ–функции Римана $\zeta(s)=\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^s}$.

22. Докажите следующее рекуррентное соотношение ($k>1$):

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{2k}{2i}B_{2i}B_{2k-2i}=(1-2k)B_{2k}.$$

23. Пусть $f(m,n)=\dfrac{1}{mn^{2k-1}}+\dfrac{1}{m^{2k-1}n}+\frac{1}{2}\sum\limits_{j=2}^{2k-2}\dfrac{1}{m^jn^{2k-j}}$. Докажите, что

$$f(m,n)-f(m+n,n)-f(m,m+n)=\sum_{0<2j<2k}\frac{1}{m^{2j}n^{2k-2j}}.$$

24. Эйлер доказал, что $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. Пользуясь этим результатом, вычислите $\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{n^{2k}}$ для всех целых k. (Ответ выражается через числа Бернулли.)

25$^\diamondsuit$**.** Попробуйте объяснить следующие равенства:

(**а**) $1+2+\ldots=-\frac{1}{12}$

(**б**) $1^2+2^2+\ldots=0$

(**в**) $1^{n-1}+2^{n-1}+\ldots=-\frac{B_n}{n}$, где n —целое число, большее 1.

26. Пусть целые числа m,n и простое число p таковы, что $2m$ не делится на $p-1$, а $2m-2n$ делится на $p^N(p-1)$ для некоторого целого N. Докажите, что числитель дроби $(1-p^{2m-1})\frac{B_{2m}}{2m}-(1-p^{2n-1})\frac{B_{2n}}{2n}$ делится на p^{N+1}. (Это означает, что «p–адическая ζ–функция непрерывна».)