Суммы степеней и числа Бернулли

Введение/предуведомление

Предлагаемые задачи призваны познакомить участников Конференции с двумя сюжетами, тесно связанными между собой. Первый из них — нахождение суммы степеней первых n натуральных чисел. Ответ в этой задаче формулируется в терминах одной замечательной последовательности, известной большинству математиков,— последовательности чисел Бернулли, арифметическим свойствам которой посвящен второй сюжет. Эта последовательность появлялась в самых разных разделах математики:теории чисел, анализе (действительном и p-адическом), алгебраической топологии, теории групп Ли и т. д. У такой популярности есть неприятное следствие: все по-настоящему замечательные свойства этой последовательности открыты очень давно, а надежда на что-то новое невелика. Поэтому задачи про числа Бернулли в известном смысле менее «исследовательские», чем многие другие задачи Летних Конференций. Так что если Вы хотите увидеть по-настоящему новые сюжеты, где про некоторые предлагаемые утверждения жюри даже не знает заранее, истинны ли они (а ведь как раз так обычно бывает в жизни), то Вам следует обратиться к другому циклу задач.

Обозначения: задачи, которые используют нестандартную технику (под нестандартной техникой в основном имеются в виду производящие функции), отмечены ромбиком ($^\diamond$). Вспомогательные факты (некоторые из них просто помогают освоиться, некоторые таят в себе указания) отмечены квадратиком ( ). Общий совет тем, кто видит эти факты в первый раз: не поленитесь доказать их (это несложно).

Биномы: напоминание и закрепление

В дальнейшем мы будем использовать биномиальную теорему. Поэтому полезно вспомнить её и решить несколько задач, обобщающих это известное утверждение.

Определение-напоминание. *Биномиальные коэффициенты* $\binom{n}{k}$ *определяются для неотрицательных* n *и* k *равенством* $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. *Более общо, можно определить мультиномиальные (по-русски их иногда не очень удачно называют полиномиальные) коэффициенты* $\binom{n}{a_1, a_2, \dots, a_m} = \frac{n!}{a_1!a_2!\dots a_m!}$ *(для т-ок неотрицательных целых чисел* $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ *с* $a_1 + a_2 + \ldots + a_m = n$*; ясно, что* $\binom{n}{k} = \binom{n}{k, n-k}$*). Другое обобщение — это* q*-биномиальные коэффициенты* $\binom{n}{k}_q = \frac{n!_q}{k!_q(n-k)!_q}$ *(*$n!_q = 1 \cdot (1+q) \cdots (1 + q + \ldots + q^{n-1})$*). Наконец, определим так называемые символы Похгаммера* $[a]_n = a(a-1)\cdots(a-n+1)$, $[a]^n = a(a+1)\cdots(a+n-1)$. *(По определению* $[a]_0 = [a]^0 = 1$*.)*

1 . Докажите равенства для произвольных $x_1, x_2, \dots, x_m$:

(**а**) (Бином Ньютона) $(x_1 + x_2)^n = x_1^n + nx_1^{n-1}x_2 + \ldots + \binom{n}{i}x_1^i x_2^{n-i} + \ldots + x_2^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x_1^i x_2^{n-i}$.

(**б**) (Мультиномиальная теорема) $(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n = \sum_{a_1, a_2, \dots, a_m} \binom{n}{a_1, a_2, \dots, a_m} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_m^{a_m}$, где суммирование происходит по всем мультиномиальным коэффициентам, где сверху стоит n.

2 . Докажите равенства для проивольных a, b и натурального n:

(**а**) $[a+b]_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} [a]_i [b]_{n-i}$.

(**б**) $[a+b]^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} [a]^i [b]^{n-i}$.

3 . Докажите для произвольных q, z и натурального n равенство $(1+z)(1+qz)\cdots(1+q^{n-1}z) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_q z^k q^{k(k-1)/2}$. (Вывод. $\binom{n}{k}_q$ при любых n и k является многочленом от q, что неочевидно из определения.)

Вопрос (*ещё менее обязательный, чем прочие предлагаемые задачи***).** Какие ещё интерпретации для $\binom{n}{k}$, $\binom{n}{a_1, a_2, \dots, a_n}$, $\binom{n}{k}_q$ Вы можете предложить?

Суммы степеней

Знатоки истории науки говорят, что числа Бернулли были определены Якобом Бернулли в его работе «Ars conjectandi»[1], где среди прочих обсуждалась такая задача:

Задача JB. *Пусть* $S_k(n) = 1^k + 2^k + \ldots + (n-1)^k$. *Найти такой многочлен* $P_k(x)$*, что* $P_k(n) = S_k(n)$ *для любого* n.

4. (**а**) Докажите, что такой многочлен $P_k(x)$ существует.

(**б**) Найдите $P_k(x)$ для $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

Бернулли заметил (найдя $P_k(x)$ при небольших k), что коэффициенты этих многочленов подчиняются определенным закономерностям. А именно, существуют такие числа B_0, B_1, $B_2, \dots, B_m, \dots$, что

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1}\left(B_0 n^{k+1} + \binom{k+1}{1} B_1 n^k + \ldots + \binom{k+1}{k} B_k n\right) = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i} B_i n^{k+1-i}. \qquad (1)$$

Как обычно, доказательство не так уж сложно, когда становится ясно, что именно надо доказывать.

[1] то есть «Искусство предположения». Это одна из первых работ по теории вероятностей

Определение. *Последовательность чисел Бернулли B_m задаётся рекуррентным соотношением*[2]

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}B_i = B_0 + \binom{k+1}{1}B_1 + \ldots + \binom{k+1}{i}B_i + \ldots + (k+1)B_k = 0 \qquad (2)$$

при $k > 0$ и условием $B_0 = 1$.

5. Докажите, что если так определять числа B_k, то равенство (**??**) выполняется.

6. Выпишите первые 20 чисел Бернулли. Разложите на простые множители их числители (указание: в основном они окажутся простыми, хотя пример B_{20} показывает, что это верно не всегда) и знаменатели.

7. Докажите, что при нечётном $n > 1$ $B_n = 0$.

Теперь решение задачи JB не представляет никакого труда.

8. Выпишите многочлены $P_k(x)$ при $k < 20$.[3]

Выписав несколько многочленов $P_k(x)$, можно попытаться придумать какие-то формулы с их участием. Например, очевидно, что $P_1(x) \cdot P_1(x) = P_3(x)$.

9. Найдите пропущенные коэффициенты: (**а**) $6P_1(x) \cdot P_2(x) = \ldots P_4(x) + \ldots P_2(x)$ (**б**) $3P_2(x) \cdot P_2(x) = \ldots P_5(x) + \ldots P_3(x)$ (**в**) $12P_2(x) \cdot P_3(x) = \ldots P_6(x) + \ldots P_4(x)$ (**г**) $2P_3(x) \cdot P_3(x) = \ldots P_7(x) + \ldots P_5(x)$

(**д**) Докажите, что для любого многочлена степени k существует и единственно представление в виде $a_{-1} + a_0P_0(x) + a_1P_1(x) + \ldots + a_{k-1}P_{k-1}(x)$, где a_{-1}, $a_0, \ldots, a_{k-1}$ — числа (зависящие от многочлена).

Некоторые из напрашивающихся после проделанной Вами работы предположений верны...

(**е**) Докажите, что в таком представлении многочлена $P_n(x)P_m(x)$ встречаются (с ненулевыми коэффициентами) только многочлены $P_l(x)$ с l той же чётности, что и $m+n+1$. (Указание: как *правильно* определить $P_0(x)$?)

...а некоторые — нет...

(**ж**) Найдите такое представление для многочлена $P_3(x)P_4(x)$.

Числители и знаменатели

Следующий сюжет стал популярен после работ Э. Куммера, который в 50-е годы XIX века связал свойства числителей чисел Бернулли с истинностью Последней Теоремы Ферма[4]. По-видимому, это одна из основных причин того, что эти числители устроены сравнительно загадочно. В то же время знаменатели чисел Бернулли устроены весьма просто.

10 . Пусть p – простое число. (**а**) Докажите, что остатки от деления на p образуют поле. (То, что их можно складывать и умножать, очевидно. Надо проверить, что для числа a, не делящегося на p, существует такое число b, что ab даёт остаток 1 при делении на p, и при этом остаток числа b при делении на p определён однозначно.). (**б**) Докажите, что что для любого числа a, не делящегося на p, число $a^{p-1} - 1$ делится на p, а для $k < p-1$ найдётся целое число b, не делящееся на p, для которого $b^k - 1$ не делится на p. (Указание. В поле у многочлена степени k не более k корней.)

11. Докажите, что: (**а**) $S_k(p)$ кратно p, если k не делится на $p-1$ (**б**) иначе $S_k(p)+1$ кратно p

12. (Т. Клаузен — Х. фон Штаудт, 1840 г.) $B_{2n} + \sum\limits_p \frac{1}{p}$ — целое число, где суммирование ведется по простым p, для которых $2n$ кратно $p-1$.

13. Найдите без использования рекуррентного соотношения число B_{22}, если известно, что оно заключено между 6192 и 6193.

14. Докажите, что знаменатель числа B_{2n} равен 6 для бесконечно многих n.

15$^\diamondsuit$. (**а**) Докажите, что для любого n $2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}/2n$ — целое число. (**б**) Докажите, что для любого целого a $a^{2n}(a^{2n}-1)B_{2n}/2n$ — целое число.

Одним из источников информации (впрочем, весьма неполной и косвенной) о числителях и знаменателях чисел Бернулли является следующая задача.

16. (Х. фон Штаудт, 1845 г.) Знаменатель числа B_{2n}/n делится на простое число p тогда и только тогда, когда знаменатель числа B_{2n} делится на p.

---

[2]Это соотношение допускает удобную запись $(B+1)^{k+1} = B^{k+1}$, где для приведения к знакомому виду надо раскрыть скобки и заменить степени на нижние индексы. А те, кто знаком с производящими функциями, могут проверить, что экспоненциальная производящая функция для чисел Бернулли — это $B(t) = \frac{t}{e^t-1}$.

[3]Бернулли с гордостью сообщает в своей книге, что ему удалось вычислить $S_{10}(1000)$ «за половину четверти часа».

[4]Используя наиболее современные идеи теории чисел того времени, он доказал, что Последняя Теорема Ферма верна для каждого простого показателя p, не являющегося делителем числителя ни одного из чисел $B_{2n}/2n$ (представленного в виде несократимой дроби). Такие простые числа называются регулярными. К сожалению, неизвестно даже, является ли множество регулярных простых чисел бесконечным. Зато Иенсен в 1915 г. доказал, что не регулярных простых чисел бесконечно много. Наименьшее простое, не являющееся регулярным, это 37 — делитель числителя 7709321041217 числа $B_{32}/32$.