Суммы степеней и числа Бернулли

Введение/предуведомление

Предлагаемые задачи призваны познакомить участников Конференции с двумя сюжетами, тесно связанными между собой. Первый из них — нахождение суммы степеней первых n натуральных чисел. Ответ в этой задаче формулируется в терминах одной замечательной последовательности, известной большинству математиков,— последовательности чисел Бернулли, арифметическим свойствам которой посвящен второй сюжет. Эта последовательность появлялась в самых разных разделах математики:теории чисел, анализе (действительном и p-адическом), алгебраической топологии, теории групп Ли и т. д. У такой популярности есть неприятное следствие: все по-настоящему замечательные свойства этой последовательности открыты очень давно, а надежда на что-то новое невелика. Поэтому задачи про числа Бернулли в известном смысле менее «исследовательские», чем многие другие задачи Летних Конференций. Так что если Вы хотите увидеть по-настоящему новые сюжеты, где про некоторые предлагаемые утверждения жюри даже не знает заранее, истинны ли они (а ведь как раз так обычно бывает в жизни), то Вам следует обратиться к другому циклу задач.

Обозначения: задачи, которые используют нестандартную технику (под нестандартной техникой в основном имеются в виду производящие функции), отмечены ромбиком ($^\diamond$). Вспомогательные факты (некоторые из них просто помогают освоиться, некоторые таят в себе указания) отмечены квадратиком ($^\square$). Общий совет тем, кто видит эти факты в первый раз: не поленитесь доказать их (это несложно).

Биномы: напоминание и закрепление

В дальнейшем мы будем использовать биномиальную теорему. Поэтому полезно вспомнить её и решить несколько задач, обобщающих это известное утверждение.

Определение-напоминание. *Биномиальные коэффициенты* $\binom{n}{k}$ *определяются для неотрицательных* n *и* k *равенством* $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. *Более общо, можно определить мультиномиальные (по-русски их иногда не очень удачно называют полиномиальные) коэффициенты* $\binom{n}{a_1,\, a_2,\, \dots\, ,\, a_m} = \frac{n!}{a_1!a_2!\dots a_m!}$ *(для* m*-ок неотрицательных целых чисел* $(a_1, a_2, \dots , a_m)$ *с* $a_1 + a_2 + \ldots + a_m = n$*; ясно, что* $\binom{n}{k} = \binom{n}{k,\, n-k}$*). Другое обобщение — это* q*-биномиальные коэффициенты* $\binom{n}{k}_q = \frac{n!_q}{k!_q(n-k)!_q}$ $(n!_q = 1\cdot(1+q)\cdots(1+q+\ldots+q^{n-1}))$*. Наконец, определим так называемые символы Похгаммера* $[a]_n = a(a-1)\cdots(a-n+1)$, $[a]^n = a(a+1)\cdots(a+n-1)$. *(По определению* $[a]_0 = [a]^0 = 1$*.)*

1$^\square$. Докажите равенства для произвольных $x_1, x_2, \dots , x_m$:

(**a**) (Бином Ньютона) $(x_1 + x_2)^n = x_1^n + nx_1^{n-1}x_2 + \ldots + \binom{n}{i}x_1^i x_2^{n-i} + \ldots + x_2^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}x_1^i x_2^{n-i}$.

(**b**) (Мультиномиальная теорема) $(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n = \sum_{a_1,\, a_2,\dots\, ,\, a_m} \binom{n}{a_1,\, a_2,\dots\, ,\, a_m} x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_m^{a_m}$, где суммирование происходит по всем мультиномиальным коэффициентам, где сверху стоит n.

2$^\square$. Докажите равенства для проивольных a, b и натурального n:

(**a**) $[a + b]_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}[a]_i[b]_{n-i}$.

(**b**) $[a + b]^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}[a]^i[b]^{n-i}$.

3$^\square$. Докажите для произвольных q, z и натурального n равенство $(1 + z)(1 + qz)\cdots(1 + q^{n-1}z) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_q z^k q^{k(k-1)/2}$. (Вывод. $\binom{n}{k}_q$ при любых n и k является многочленом от q, что неочевидно из определения.)

Вопрос (*ещё менее обязательный, чем прочие предлагаемые задачи***).** Какие ещё интерпретации для $\binom{n}{k}$, $\binom{n}{a_1,\, a_2,\dots\, ,\, a_n}$, $\binom{n}{k}_q$ Вы можете предложить?

Суммы степеней

Знатоки истории науки говорят, что числа Бернулли были определены Якобом Бернулли в его работе «Ars conjectandi»[1], где среди прочих обсуждалась такая задача:

Задача JB. *Пусть* $S_k(n) = 1^k + 2^k + \ldots + (n-1)^k$. *Найти такой многочлен* $P_k(x)$, *что* $P_k(n) = S_k(n)$ *для любого* n.

4. (**a**) Докажите, что такой многочлен $P_k(x)$ существует.

(**b**) Найдите $P_k(x)$ для $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

Бернулли заметил (найдя $P_k(x)$ при небольших k), что коэффициенты этих многочленов подчиняются определенным закономерностям. А именно, существуют такие числа $B_0, B_1, B_2, \dots , B_m, \dots$, что

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1}\left(B_0 n^{k+1} + \binom{k+1}{1}B_1 n^k + \ldots + \binom{k+1}{k}B_k n\right) = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}B_i n^{k+1-i}. \qquad (1)$$

Как обычно, доказательство не так уж сложно, когда становится ясно, что именно надо доказывать.

[1] то есть «Искусство предположения». Это одна из первых работ по теории вероятностей

Определение. *Последовательность чисел Бернулли B_m задаётся рекуррентным соотношением*[2]

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i} B_i = B_0 + \binom{k+1}{1} B_1 + \ldots + \binom{k+1}{i} B_i + \ldots + (k+1)B_k = 0 \qquad (2)$$

при $k > 0$ и условием $B_0 = 1$.

5. Докажите, что если так определять числа B_k, то равенство (1) выполняется.

6. Выпишите первые 20 чисел Бернулли. Разложите на простые множители их числители (указание: в основном они окажутся простыми, хотя пример B_{20} показывает, что это верно не всегда) и знаменатели.

7. Докажите, что при нечётном $n > 1$ $B_n = 0$.

Теперь решение задачи JB не представляет никакого труда.

8. Выпишите многочлены $P_k(x)$ при $k < 20$.[3]

Выписав несколько многочленов $P_k(x)$, можно попытаться придумать какие-то формулы с их участием. Например, очевидно, что $P_1(x) \cdot P_1(x) = P_3(x)$.

9. Найдите пропущенные коэффициенты: (**a**) $6P_1(x) \cdot P_2(x) = \ldots P_4(x) + \ldots P_2(x)$ (**b**) $3P_2(x) \cdot P_2(x) = \ldots P_5(x) + \ldots P_3(x)$ (**c**) $12P_2(x) \cdot P_3(x) = \ldots P_6(x) + \ldots P_4(x)$ (**d**) $2P_3(x) \cdot P_3(x) = \ldots P_7(x) + \ldots P_5(x)$

(**e**) Докажите, что для любого многочлена степени k существует и единственно представление в виде $a_{-1} + a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + \ldots + a_{k-1} P_{k-1}(x)$, где a_{-1}, $a_0, \ldots, a_{k-1}$ — числа (зависящие от многочлена).

Некоторые из напрашивающихся после проделанной Вами работы предположений верны...

(**f**) Докажите, что в таком представлении многочлена $P_n(x)P_m(x)$ встречаются (с ненулевыми коэффициентами) только многочлены $P_l(x)$ с l той же чётности, что и $m+n+1$. (Указание: как *правильно* определить $P_0(x)$?)

...а некоторые — нет...

(**g**) Найдите такое представление для многочлена $P_3(x)P_4(x)$.

Числители и знаменатели

Следующий сюжет стал популярен после работ Э. Куммера, который в 50-е годы XIX века связал свойства числителей чисел Бернулли с истинностью Последней Теоремы Ферма[4]. По-видимому, это одна из основных причин того, что эти числители устроены сравнительно загадочно. В то же время знаменатели чисел Бернулли устроены весьма просто.

10$^{\square}$. Пусть p – простое число. (**a**) Докажите, что остатки от деления на p образуют поле. (То, что их можно складывать и умножать, очевидно. Надо проверить, что для числа a, не делящегося на p, существует такое число b, что ab даёт остаток 1 при делении на p, и при этом остаток числа b при делении на p определён однозначно.). (**b**) Докажите, что что для любого числа a, не делящегося на p, число $a^{p-1} - 1$ делится на p, а для $k < p-1$ найдётся целое число b, не делящееся на p, для которого $b^k - 1$ не делится на p. (Указание. В поле у многочлена степени k не более k корней.)

11. Докажите, что: (**a**) $S_k(p)$ кратно p, если k не делится на $p-1$ (**b**) иначе $S_k(p) + 1$ кратно p

12. (Т. Клаузен — Х. фон Штаудт, 1840 г.) $B_{2n} + \sum\limits_p \frac{1}{p}$ — целое число, где суммирование ведется по простым p, для которых $2n$ кратно $p-1$.

13. Найдите без использования рекуррентного соотношения число B_{22}, если известно, что оно заключено между 6192 и 6193.

14. Докажите, что знаменатель числа B_{2n} равен 6 для бесконечно многих n.

15$^{\diamondsuit}$. (**a**) Докажите, что для любого n $2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}/2n$ — целое число. (**b**) Докажите, что для любого целого a $a^{2n}(a^{2n}-1)B_{2n}/2n$ — целое число.

Одним из источников информации (впрочем, весьма неполной и косвенной) о числителях и знаменателях чисел Бернулли является следующая задача.

16. (Х. фон Штаудт, 1845 г.) Знаменатель числа B_{2n}/n делится на простое число p тогда и только тогда, когда знаменатель числа B_{2n} делится на p.

---

[2]Это соотношение допускает удобную запись $(B+1)^{k+1} = B^{k+1}$, где для приведения к знакомому виду надо раскрыть скобки и заменить степени на нижние индексы. А те, кто знаком с производящими функциями, могут проверить, что экспоненциальная производящая функция для чисел Бернулли — это $B(t) = \frac{t}{e^t - 1}$.

[3]Бернулли с гордостью сообщает в своей книге, что ему удалось вычислить $S_{10}(1000)$ «за половину четверти часа».

[4]Используя наиболее современные идеи теории чисел того времени, он доказал, что Последняя Теорема Ферма верна для каждого простого показателя p, не являющегося делителем числителя ни одного из чисел $B_{2n}/2n$ (представленного в виде несократимой дроби). Такие простые числа называются регулярными. К сожалению, неизвестно даже, является ли множество регулярных простых чисел бесконечным. Зато Иенсен в 1915 г. доказал, что не регулярных простых чисел бесконечно много. Наименьшее простое, не являющееся регулярным, это 37 — делитель числителя 7709321041217 числа $B_{32}/32$.

Ещё несколько задач про суммы степеней и числа Бернулли

По словам некоторых участников, им были и раньше известны некоторые задачи (Видимо, любители книги «Конкретная Математика» комментируют так большинство задач, где встречаются формулы.). Задачи, которые Вы знали раньше, можно сдавать устно членам жюри, занимающимся этим циклом задач (Володя Доценко, Вадим Бугаенко).

Вот ещё две задачи, которые были сформулированы на представлении.

17. (Сравнение Куммера) Пусть n, k целые, p простое, $2n$ не делится на $p-1$, а $2n-2k$ делится на $p-1$. Докажите, что числитель дроби $B_{2n}/2n - B_{2k}/2k$ делится на p. (И поэтому для выяснения, является ли данное простое p регулярным, надо проверить конечное число случаев.)

18. Докажите, что существует бесконечно много иррегулярных простых чисел (Указание. Можно использовать без доказательства такой факт: $|B_{2k}/2k| > 1$ при больших k.)

Суммы степеней и числа Бернулли: после промежуточного финиша

Ещё о мультиномиальных коэффициентах

Никто не пытался предложить интерпретации для ...–номиальных коэффициентов. Следующие две задачи содержат довольно забавные интерпретации.

19. (Гипотеза Фримана Дайсона) Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — неотрицательные целые числа. Докажите, что свободный член в $\prod_{1\le i\ne j\le n}(1-\frac{x_j}{x_i})^{a_j}$ равен $\binom{a_1+\ldots+a_n}{a_1,\ldots,a_n}$.

20$^\diamond$. Докажите, что $\binom{n}{k}_q$ совпадает с числом k-мерных подпространств в n-мерном пространстве над конечным полем $\mathbb{F}_q$.

Известно ли Вам решение, не использующее «Суммы степеней и ... »?

Вам предлагается не только попробовать найти элементарное решение, но и предлагать свои задачи ...

21. (предложена О. Гольбергом и М. Левиным) Пусть n — целое число, а p — простое число, большее 2. Докажите, что $\sum\limits_{k>0}\binom{2n+1}{k(p-1)}$ делится на p. (Удобно считать, что $\binom{n}{k}=0$ при $n<k$.)

ζ-функция: вещественная и p-адическая

В следующих задачах представлены некоторые результаты, касающиеся так называемой ζ-функции Римана $\zeta(s)=\sum\limits_{n\ge1}\dfrac{1}{n^s}$.

22. Докажите следующее рекуррентное соотношение ($k>1$):

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{2k}{2i}B_{2i}B_{2k-2i}=(1-2k)B_{2k}.$$

23. Пусть $f(m,n)=\dfrac{1}{mn^{2k-1}}+\dfrac{1}{m^{2k-1}n}+\frac12\sum\limits_{j=2}^{2k-2}\dfrac{1}{m^jn^{2k-j}}$. Докажите, что

$$f(m,n)-f(m+n,n)-f(m,m+n)=\sum_{0<2j<2k}\frac{1}{m^{2j}n^{2k-2j}}.$$

24. Эйлер доказал, что $\sum_{n\ge1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. Пользуясь этим результатом, вычислите $\sum_{k\ge1}\frac{1}{n^{2k}}$ для всех целых k. (Ответ выражается через числа Бернулли.)

25$^\diamond$. Попробуйте объяснить следующие равенства:

(**a**) $1+2+\ldots=-\frac{1}{12}$

(**b**) $1^2+2^2+\ldots=0$

(**c**) $1^{n-1}+2^{n-1}+\ldots=-\frac{B_n}{n}$, где n —целое число, большее 1.

26. Пусть целые числа m,n и простое число p таковы, что $2m$ не делится на $p-1$, а $2m-2n$ делится на $p^N(p-1)$ для некоторого целого N. Докажите, что числитель дроби $(1-p^{2m-1})\frac{B_{2m}}{2m}-(1-p^{2n-1})\frac{B_{2n}}{2n}$ делится на p^{N+1}. (Это означает, что «p-адическая ζ-функция непрерывна».)