Емельянов Л.А., Емельянова Т.Л.

Семейство Фейербаха.

Вводная часть.

Внутри любого разностороннего треугольника есть точка, через которую проходят две замечательные его окружности – вписанная и окружность девяти точек. (Для нашего исследования случай равнобедренного треугольника является вырожденным.) Они, как известно, касаются друг друга в этой точке. Этот факт, а также факт касания окружности девяти точек трёх вневписанных окружностей треугольника, был доказан немецким математиком XIX века К. Фейербахом, именем которого довольно часто и называют окружность девяти точек.

Предлагаемая задача устанавливает новые свойства этой точки (будем называть её точкой Фейербаха). Результатом задачи будет построение целого семейства окружностей, проходящих через точку Фейербаха, среди которых – ещё две замечательные окружности в треугольнике: окружность, проходящая через основания биссектрис, и окружность, проходящая через точки касания вневписанных окружностей со сторонами треугольника.

Для решения задачи предлагается аппарат полярных соответствий.

Полярные соответствия – одна из наиболее изящных областей геометрии, изучение которой не требует специальной подготовки. Этот аппарат позволяет решать «в одну строчку» даже довольно трудные с точки зрения традиционных методов задачи.

Рассмотрим четвёрку точек, расположенных на одной прямой особым образом. Пусть точка B принадлежит отрезку AC. Она делит его в отношении $\frac{AB}{BC}$. Найдём на прямой AC точку D такую, что она делит этот отрезок в таком же отношении, но снаружи, то есть $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$ (рис. 1).

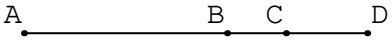

Рис. 1

Такая четвёрка точек называется ***гармонической***, а точки B и D – ***гармонически сопряжёнными*** относительно отрезка AC.

Если при определении отношения учитывать направление отрезков (отношение положительно, если отрезки сонаправлены, и отрицательно, если противоположно направлены), то $\frac{AD}{DC} = -\frac{AB}{BC}$, или

$$\frac{AD}{DC} : \frac{AB}{BC} = -1.$$

Двойное отношение $\frac{AD}{DC} : \frac{AB}{BC}$ определено для любых четырёх точек на прямой, включая и бесконечно удалённую. Если, например, B – бесконечно удалённая, то $\frac{AB}{BC} = -1$, а $\frac{AD}{DC} : \frac{AB}{BC} = -\frac{AD}{DC}$. В частности, середине отрезка гармонически сопряжена именно бесконечно удалённая точка.

Двойное отношение четырёх точек можно переносить с одной прямой на другую с помощью пучка прямых (задача 1). Это значит, что, если четыре прямые, выходящие из одной точки, фиксированы, то, пересекая произвольную прямую, они образуют четвёрку то-

чек, двойное отношение которых не зависит от положения этой прямой. Это постоянное двойное отношение называется ***двойным отношением четырёх прямых***. В случае, когда оно равно –1, т.е. при пересечении с любой прямой образуется гармоническая четвёрка точек, эта четвёрка прямых также называется ***гармонической***.

Поляра точки относительно угла.

Через точку *P* проведём две прямые, пересекающие стороны угла с вершиной *O* в точках *A, B, C* и *D*. Пусть *Q* – точка пересечения диагоналей четырёхугольника *ABCD* (рис. 2). Покажем, что прямые *OP* и *OQ* вместе со сторонами угла образуют гармоническую четвёрку. Для этого достаточно доказать, что на прямой *PQ* эти четыре прямые высекают гармоническую четвёрку точек *P, T, Q, S*.

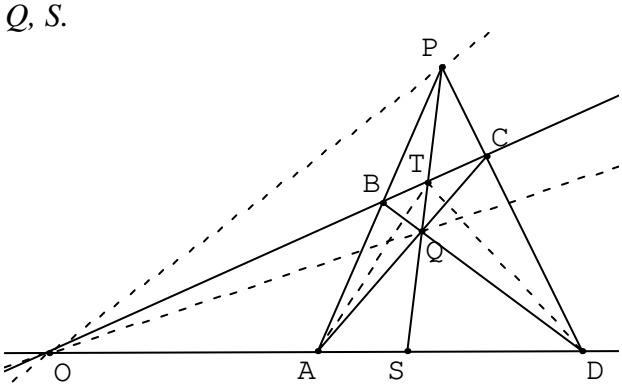

Рис. 2

Действительно, перенесём двойное отношение этих четырёх точек с прямой *PQ* на прямую *OC* с помощью прямых *AP, AT, AQ, AS*. Получим двойное отношение точек *B, T, C, O* (*P*→*B, T*→*T, Q*→*C, S*→*O*). Его, в свою очередь, перенесём обратно на прямую *PQ* с помощью прямых *DB, DT, DC, DO*. Получим точки *Q, T, P, S* (*B*→*Q, T*→*T, C*→*P, O*→*S*). Т.к. мы перебрасывали двойное отношение с четвёрки на четвёрку не меняя его, оказалось, что двойное отношение точек *P, T, Q, S* не меняется при перестановке точек *P* и *Q*. Это возможно только в том случае, когда точки *P* и *Q* делят отрезок *TS* в одном (по абсолютной величине) отношении, т.е. *P, T, Q, S* – гармоническая четвёрка, ч.т.д.

Проводя всевозможные секущие через точку *P*, мы получим, что прямая *OQ* **является геометрическим местом точек, гармонически сопряжённых точке *P* относительно отрезка секущей внутри угла.** Эта прямая называется ***полярой*** точки *P* относительно угла. Если точка берётся внутри угла (например, точка *Q*), то, проведя аналогичные рассуждения (в этом случае диагонали четырёхугольника *ACBD* будут прямые *AB* и *CD*), получим, что прямая *OP* является полярой точки *Q* относительно этого же угла.

Поляра точки относительно окружности.

Проведём через точку *P*, лежащую вне окружности с центром *O* произвольную секущую. Покажем, что **геометрическим местом точек, гармонически сопряжённых точке *P* относительно отрезка секущей внутри окружности, является прямая, перпендикулярная *OP*.**

Пусть *AB* – диаметр окружности, лежащий на прямой *OP*, *MN* – секущая, проходящая через точку *P*, *S* – точка пересечения прямых *AM* и *BN* (рис. 3).

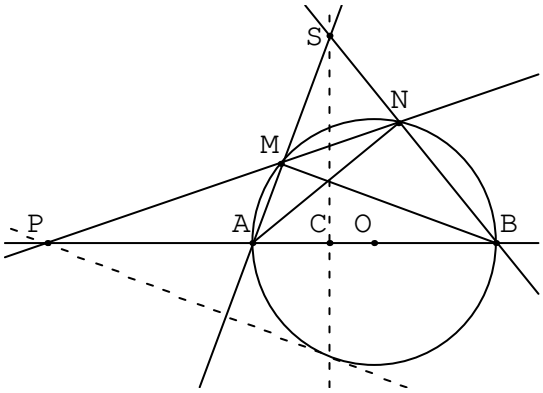

Рис. 3

Заметим, что прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей четырёхугольника *AMNB* и вершину *S* угла *ASB*, является полярой точки *P* относительно этого угла, а, значит, вместе с точкой *P* делит и диаметр *AB*, и отрезок *MN* гармонически. Отрезки *AN* и *BM* являются высотами в треугольнике *ASB*, следовательно, *SC* – тоже высота. Значит, *SC* ⊥ *OP*.Поскольку положение точки *C* на отрезке *AB* определено однозначно (*P, A, C, B* – гармоническая четвёрка), то при любом положении секущей делить вместе с точкой *P* отрезок *MN* гармонически будет одна и та же прямая *SC*. Отсюда следует, что геометрическим местом точек, гармонически сопряжённых точке *P* относительно отрезка секущей внутри окружности, является прямая, перпендикулярная *OP*, ч.т.д. Эта прямая называется ***полярой*** точки *P* относительно окружности, а точка *P* – ***полюсом*** этой прямой относительно этой окружности.

Если через точку *P* провести две произвольные секущие, как, например, *BC* и *AD* на рис. 6, то поляра точки *P* относительно окружности поделит вместе с точкой *P* отрезки *BC* и *AD* гармонически, значит, будет полярой точки *P* и относительно угла со сторонами *AB* и *CD*, т.е. пройдёт через точку *S* и точку *Q* – так и строится поляра (одной линейкой).

Поляра точки, лежащей внутри окружности, определяется аналогично, поскольку это определение опирается на свойство поляры относительно угла. А для точки *P* вне окружности поляру можно определить ещё и как прямую, соединяющую точки касания окружности двух прямых, выпущенных из точки *P*. (Предлагаем убедиться в этом самостоятельно, а заодно и придумать способ построения этих касательных с помощью одной линейки.)

Поляра точки, лежащей на окружности, – это касательная к окружности, проведённая через эту точку.

Задачи

0. Если три прямые проходят через одну точку, то соответствующие им полюсы относительно окружности лежат на одной прямой, и наоборот.
1. Двойное отношение сохраняется при центральном проектировании. Т.е. двойные отношения точек A, B, C, D и A_1, B_1, C_1, D_1 равны (рис. 4).

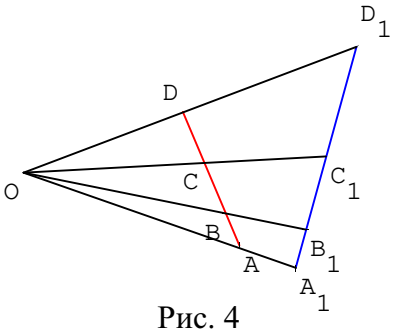

Рис. 4

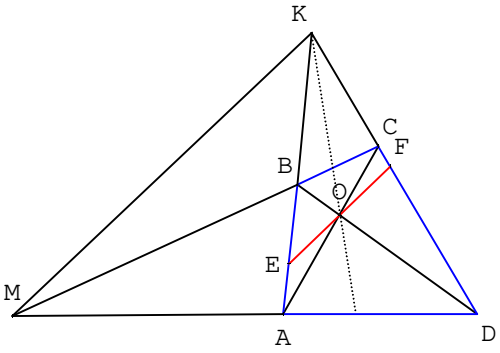

Рис. 5

2. Продолжения противоположных сторон произвольного выпуклого четырёхугольника ABCD пересекаются в точках M и K. Через точку O пересечения его диагоналей проводится прямая, параллельная MK. Докажите, что отрезок этой прямой, заключённый внутри четырёхугольника, делится точкой O пополам (рис. 5).

3. Четырёхугольник ABCD вписан в окружность с центром O, диагонали его пересекаются в точке Q, а продолжения противоположных сторон в точках S и P. Доказать, что $SQ \perp OP$ (рис. 6).

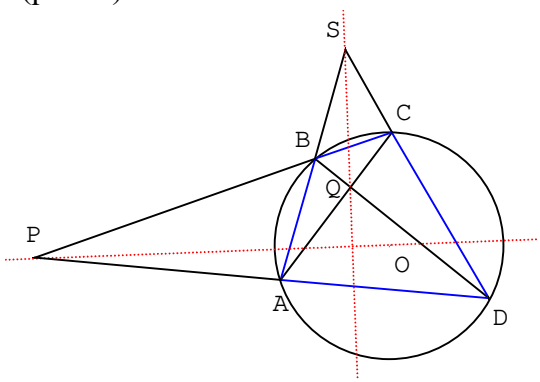

Рис. 6

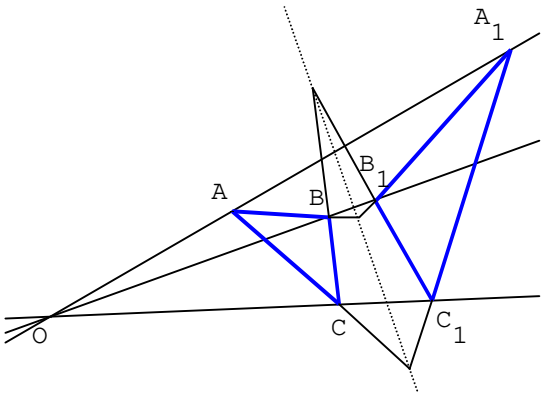

Рис. 7

4. Если треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ таковы, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, то точки пересечения прямых AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 лежат на одной прямой (рис. 7).

5. Пусть A_1, B_1, C_1 – основания чевиан в $\triangle ABC$, K – точка пересечения прямых A_1C_1 и AC. Доказать, что точки A, B_1, C, K образуют гармоническую четвёрку. Верно и обратное.

6. Пусть точки A_1, B_1, C_1, а также A_2, B_2, C_2 – основания чевиан в $\triangle ABC$. Пусть C'– точка пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2 (полюс, соответствующий вершине C), A' – точка пересечения прямых B_1C_1 и B_2C_2 (полюс, соответствующий вершине A), B' – точка пересечения прямых A_1C_1 и A_2C_2 (полюс, соответствующий вершине B). Доказать, что прямые A'B', B'C' и A'C' проходят соответственно через точки C, A и B (рис. 8).

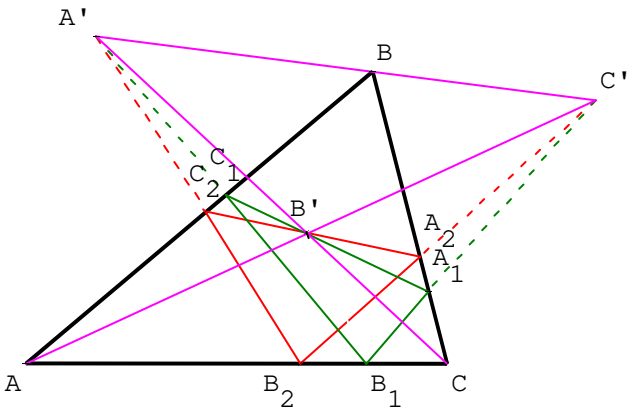

Рис. 8

Примечание. Точки A', B' и C' будем называть полюсами, порождёнными треугольниками $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$.

7. Доказать, что определённая в условии задачи 6 прямая B'C' является полярой точки A' относительно угла BAC.

8. Если одним из чевианных треугольников (задача 6), например, $\triangle A_1B_1C_1$ является треугольник Жергонна, то прямая B'C' является также полярой точки A' относительно вписанной в $\triangle ABC$ окружности.