Емельянов Л.А., Емельянова Т.Л.

Семейство Фейербаха.

Основная часть

Обозначения: # – задача, не имеющая прямого отношения к теореме; * – нерешённая задача.

9#. Вневписанная окружность треугольника ABC касается стороны BC в точке A_1. Точки B_1 и C_1 на сторонах AC и AB таковы, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. (Роль точек B_1 и C_1 могут играть, например, точки касания двух других вневписанных окружностей со сторонами треугольника.) Пусть B_2 и C_2 – вторые точки пересечения прямых B_1A_1 и C_1A_1 с данной окружностью. Доказать, что прямые B_1C_1 и B_2C_2 пересекаются на прямой BC (рис. 9).

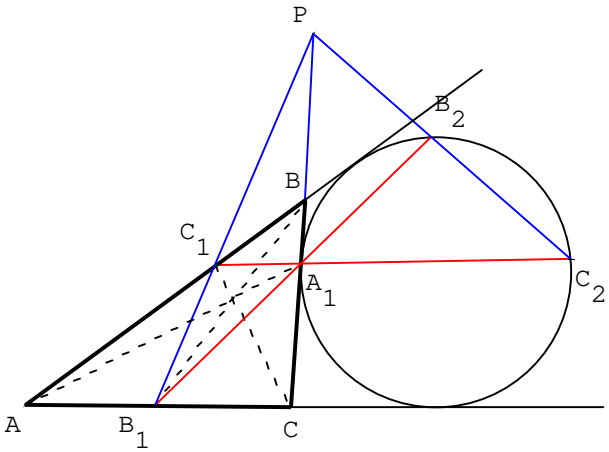

Рис. 9

10#. $ABCA_1B_1C_1$ – пятигранник, у которого две треугольные грани – ABC и $A_1B_1C_1$, назовём их основаниями, остальные грани – четырёхугольники, назовём их боковыми. Отметим на каждой боковой грани точку пересечения её диагоналей: A_0 – на BB_1C_1C, B_0 – на AA_1C_1C, C_0 – на AA_1B_1B. Доказать, что плоскости оснований и плоскость, проходящая через точки A_0, B_0 и C_0, пересекаются по одной прямой, возможно, бесконечно удалённой (т.е. параллельны).

11#. Пусть A_0 и C_0 – середины сторон *BC* и *AB* соответственно, AA_1 – биссектриса угла *A*, а *A'* и *B'* - точки касания вписанной окружности со сторонами *BC* и *CA*. Доказать, что прямые AA_1, A_0C_0 и *AB'* пересекаются в одной точке. (Рис. 10)

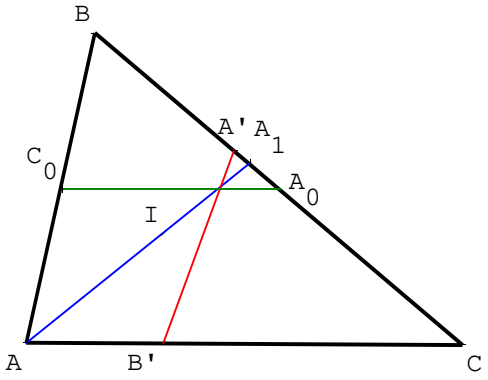

Рис. 10

12. Пусть H_2 и H_3 – основания высот на сторонах AC и AB соответственно, B_1 и C_1 – основания биссектрис, E и G – точки касания вписанной окружности на тех же сторонах. Доказать, что прямые H_2H_3, B_1C_1 и EG пересекаются в одной точке (рис. 11).

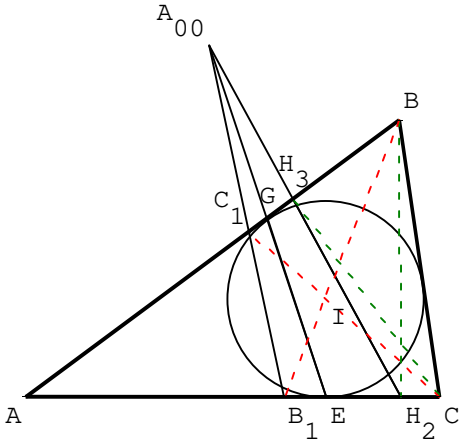

Рис. 11

13. Точки B_1 и C_1 – основания биссектрис на сторонах AC и AB, E и G – точки касания вписанной окружности с этими сторонами. Точка E_1 симметрична точке E относительно биссектрисы BB_1, точка G_1 симметрична точке G относительно биссектрисы CC_1 (рис. 12). Доказать, что прямая E_1G_1 проходит через полюс A_{00}. (Здесь и далее точки A_{00}, B_{00} и C_{00} – полюсы, порождённые треугольником Жергонна и ортотреугольником.)

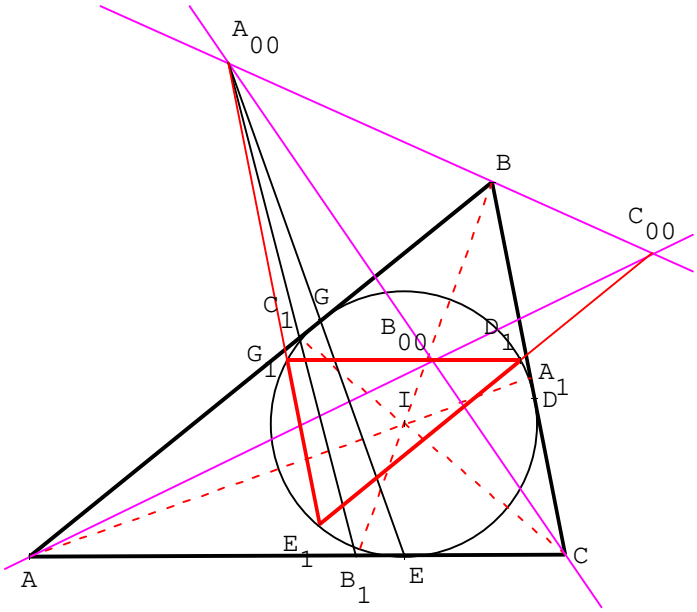

Рис. 12

14. Треугольник с вершинами в точках, симметричных точкам касания вписанной окружности со сторонами относительно соответствующих биссектрис (на рис. 12 $\triangle D_1E_1G_1$), гомотетичен исходному $\triangle ABC$.

15. Точки A_0, B_0 и C_0 – середины сторон BC, AC и AB. Доказать, что прямые A_0A_{00}, B_0B_{00} и C_0C_{00} проходят через точку Фейербаха (рис. 13).

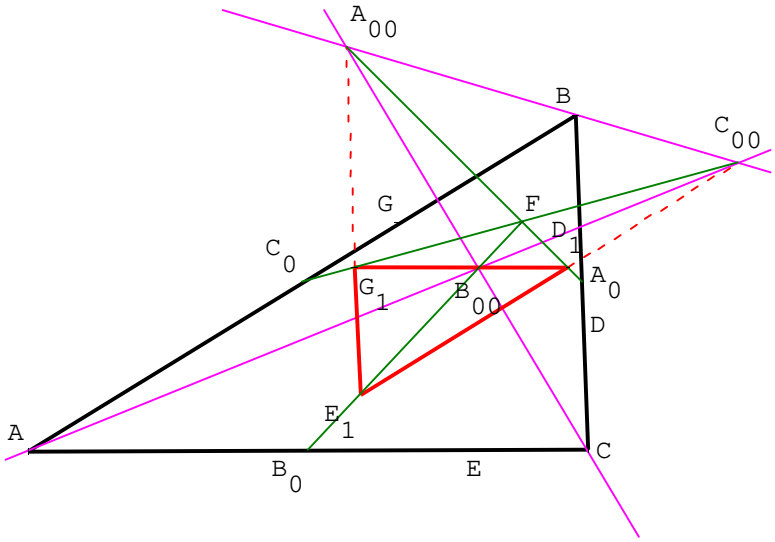

Рис. 13

16. ***Теорема***. Дан ∆ ABC. Точки A_{00}, B_{00}, C_{00} – его полюсы (точки пересечения соответственных сторон треугольника Жергонна и ортотреугольника): A_{00} соответствует паре сторон AB и AC, или, будем говорить, вершине A, B_{00} соответствует вершине B, C_{00} – вершине C. Возьмём на прямой AC произвольную точку Y и соединим её с полюсами A_{00} и C_{00}. Прямые YA_{00} и YC_{00} пересекают прямые AB и BC соответственно в точках Z и X. Тогда

а) прямая XZ проходит через полюс B_{00};

б) точки X, Y, Z являются основаниями чевиан в ∆ ABC;

в) окружность, описанная около ∆ XYZ, проходит через точку Фейербаха.

На рис. 14 $H_1H_2H_3$ – ортотреугольник, DEG – треугольник Жергонна.

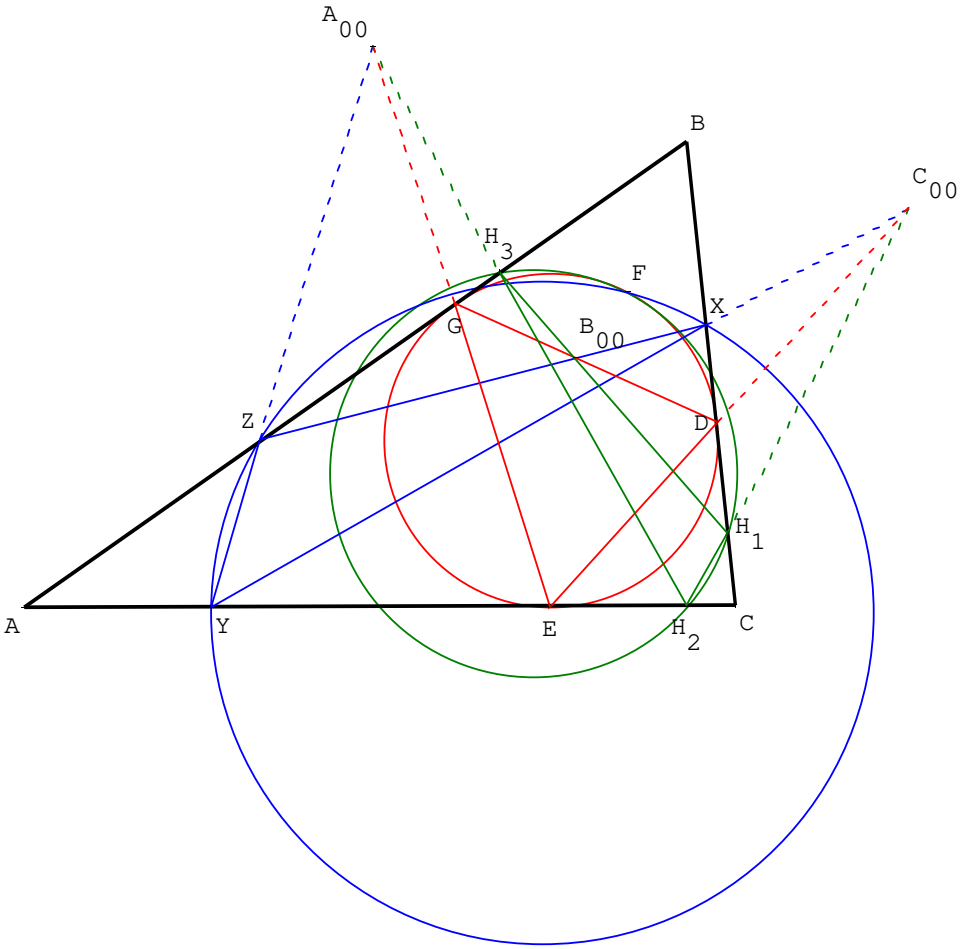

Рис. 14

17. Доказать, что окружность, описанная около оснований A_1, B_1 и C_1 биссектрис ∆ ABC, проходит через точку Фейербаха (рис. 15).

18. Доказать, что окружность, описанная около треугольника с вершинами в точках A_2, B_2 и C_2 касания вневписанных окружностей со сторонами ∆ABC, проходит через точку Фейербаха (рис. 15).

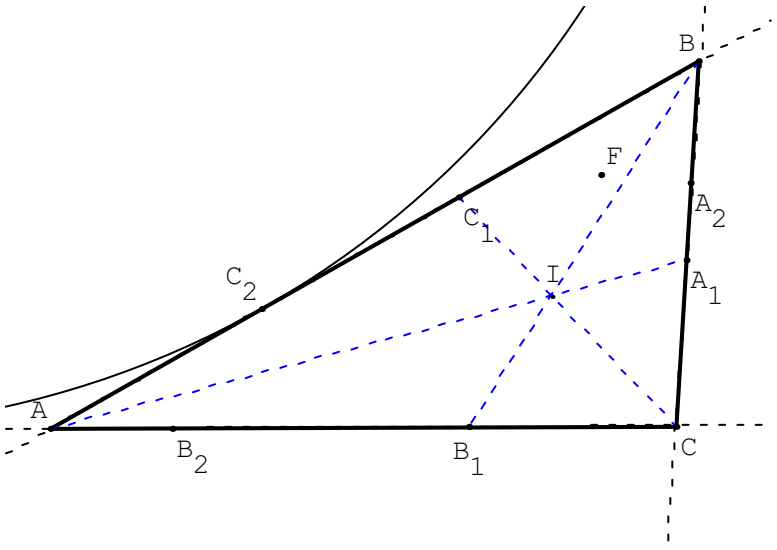

Рис. 15

19. Доказать, что три прямые, соединяющие вершины треугольника ABC с одноимёнными полюсами, порождёнными треугольником Жергонна и серединным треугольником, параллельны.

20. Отразим стороны ортотреугольника (прямые) относительно соответствующих сторон треугольника Жергонна. Доказать, что три полученные таким образом прямые образуют треугольник с вершинами на вписанной окружности.

21*. Доказать, что треугольники XYZ и $A_{00}B_{00}C_{00}$ перспективны, т.е. прямые XA_{00}, YB_{00} и ZC_{00} пересекаются в одной точке. Геометрическое место этих центров перспективы есть прямая, касательная к вписанной окружности.

22*. Доказать, что прямая, соединяющая вершину треугольника Жергонна с точкой пересечения его противоположной стороны с соответствующей ей средней линией Δ ABC, проходит через точку Фейербаха. (Другими словами, треугольник Жергонна и треугольник с вершинами в полюсах, порождённых треугольником Жергонна и серединным треугольником, перспективны относительно точки Фейербаха.)

23*. (*Другое описание семейства Фейербаха*) Пусть $\Delta A_1B_1C_1$ гомотетичен треугольнику Жергонна с центром гомотетии в центре вписанной окружности I (рис. 16). Известно, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Обозначим X, Y, Z точки их пересечения с соответствующими сторонами треугольника ABC. Доказать, что семейство окружностей, описанных около треугольников XYZ, совпадает с семейством Фейербаха.

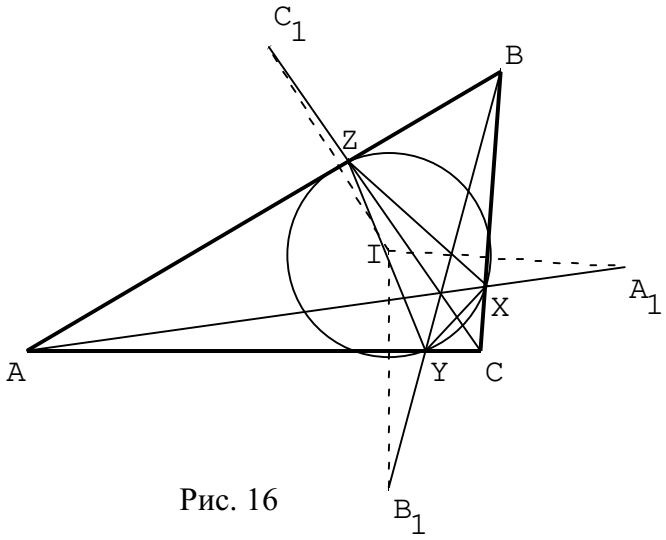

Рис. 16