Емельянов Л.А., Емельянова Т.Л.

Семейство Фейербаха

Решения задач вводной части

0. Достаточно доказать, что **если точка Q лежит на поляре точки P, то точка P лежит на поляре точки Q.**

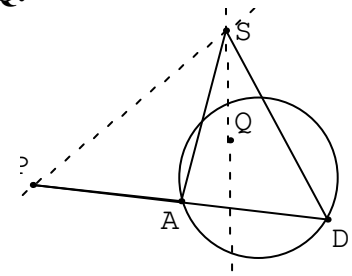

Рис. 16

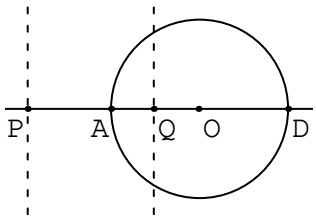

Рис. 17

Действительно, пусть S – точка пересечения поляр точек P и Q (рис. 16). AD – секущая, проходящая через точку P. Если точка Q лежит на поляре точки P, то SP, SA, SQ и SD – гармоническая четвёрка прямых. Следовательно, SP – поляра точки Q. Если же поляры точек P и Q параллельны (рис. 17), то утверждение очевидно, т.к. они перпендикулярны одному диаметру и делят его гармонически.

1. Проведём через точку A прямую параллельно прямой A_1D_1 (рис. 18). Достаточно доказать, что двойные отношения точек A, B, C, D и A, B_2, C_2, D_2 равны. (На параллельных прямых они, очевидно, равны.) По теореме Менелая, применённой к треугольнику ACC_2 и прямой BB_2,

$$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CO}{OC_2}\cdot\frac{C_2B_2}{B_2A}=-1.$$

Аналогично для DD_2

$$\frac{AD}{DC}\cdot\frac{CO}{OC_2}\cdot\frac{C_2D_2}{D_2A}=-1.$$

Приравняв эти выражения и перегруппировав сомножители, получим

$$\frac{AB}{BC}:\frac{AD}{DC}=\frac{AB_2}{B_2C_2}:\frac{AD_2}{D_2C_2}.$$

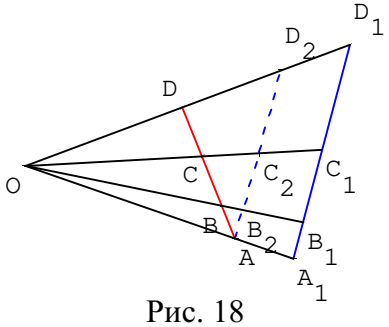

Рис. 18

Таким образом, равенство двойных отношений доказано.

2. Пусть EF – указанный отрезок. По построению ясно, что KO – поляра точки M относительно угла AKD, значит, лучи KM, KA, KO и KD – гармоническая четвёрка. На прямой EF они высекают гармоническую четвёрку точек, одна из которых бесконечно удалённая (т.к. EF || KM), следовательно, точка O – середина отрезка EF.
3. Из построения прямой SQ ясно, что это поляра точки P относительно окружности, следовательно, она перпендикулярна OP, ч. т. д.
4. При полярном соответствии относительно окружности с центром в точке O вершины A и A_1 перейдут в параллельные прямые, поскольку лежат на одном диаметре. То же и для вершин B и B_1, C и C_1. Эти три пары параллельных прямых образуют два треугольника с попарно параллельными сторонами, т.е. гомотетичных. Следовательно, прямые, соединяющие соответствующие вершины, пересекаются в одной точке, а их полюсы лежат на одной прямой, отсюда – утверждение теоремы. Нетрудно увидеть, что обратное утверждение тоже имеет место.

5. По теореме Менелая для $\triangle ABC$ и прямой A_1C_1 (рис. 19)

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CK}{KA}=-1,$$

а по теореме Чевы $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{AB_1}{B_1C}$. Следовательно,

$$\frac{AB_1}{B_1C}:\frac{AK}{KC}=-1, \text{ ч.т.д.}$$

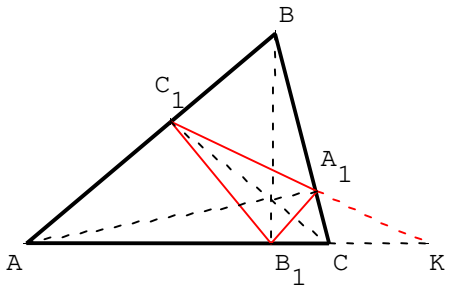

Рис. 19

6. Пусть прямые A'C' и AC пересекаются в точке R (рис. 20). Для доказательства того, что точка B лежит на прямой A'C', достаточно показать, что двойные отношения точек A, C_2, B, C_1 и A, B_2, R, B_1 равны. По теореме Чевы

$$\frac{AC_2}{C_2B}=\frac{AB_2}{B_2C}\cdot\frac{CA_2}{A_2B},$$

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}.$$

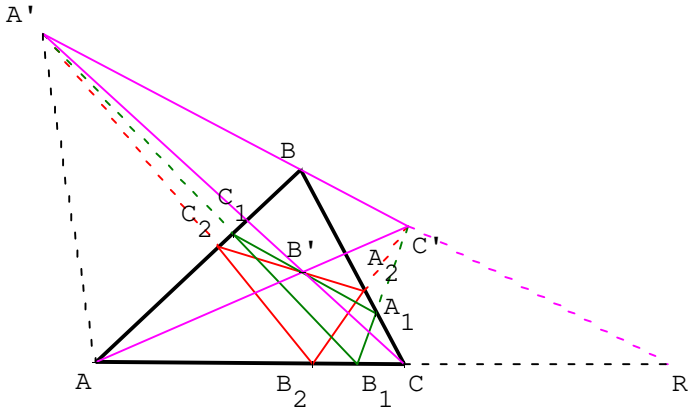

Рис. 20

Воспользовавшись этими соотношениями, а также тем, что двойные отношения точек C, A_2, B, A_1 и C, B_2, R, B_1 равны, получим

$$\frac{AC_2}{C_2B}:\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AB_2}{B_2C}\cdot\frac{CA_2}{A_2B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{AB_2}{B_2C}\cdot\frac{CB_2}{B_2R}\cdot\frac{B_1R}{B_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{AB_2}{B_2R}:\frac{AB_1}{B_1R},$$

.

Требуемое равенство доказано.

7. Точки A, B_1, C, K – гармоническая четвёрка (рис. 21). Следовательно, прямые B'A, B'B_1, B'C, B'K – гармоническая четвёрка. Эти прямые, в свою очередь, порождают гармоническую четвёрку точек M, B_1, A', C_1. Следовательно, прямая B'C' вместе с точкой A' делит отрезок B_1C_1 гармонически и, кроме того, проходит через вершину угла BAC. Значит, прямая B'C' – поляра для точки A'

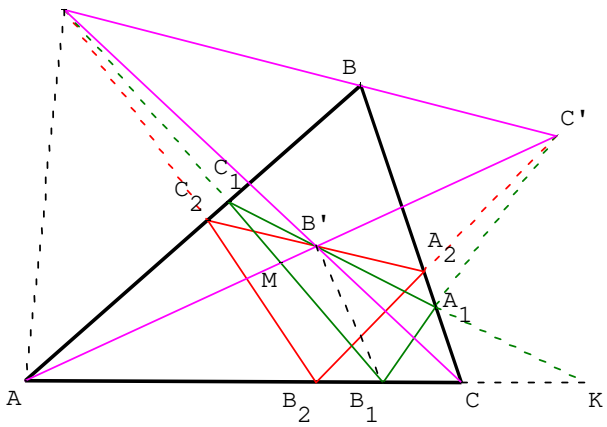

Рис. 21

8. Прямые AB и AC касаются вписанной окружности в точках C_1 и B_1 (рис. 22), значит, являются полярами точек C_1 и B_1 относительно вписанной окружности, следовательно, пересекаются в одной точке с полярой точки A_{00}. Т.е. точка A лежит на этой поляре. А поскольку прямая B'C' проходит через точку A и, кроме того, вместе с точкой A_{00} делит хорду B_1C_1 гармонически, она и является полярой точки A' относительно вписанной окружности.

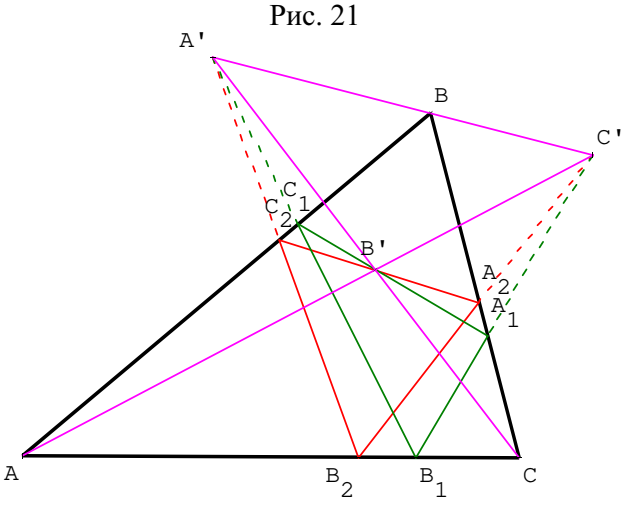

Рис. 22