Емельянов Л.А., Емельянова Т.Л.

Семейство Фейербаха

Решения задач основной части

9. Пусть прямая MK, соединяющая точки касания окружности с продолжениями сторон, пересекает прямую BC в точке P (рис.23). Точка A – полюс прямой MK относительно окружности, точка A_1 – полюс прямой BC, значит, прямая AA_1 – поляра точки P относительно окружности, а также относительно угла BAC, поскольку на прямой PK лучи AP, AB, AA_1 и AC высекают гармоническую четвёрку точек. Т.к. на прямой AA_1 лежит точка пересечения прямых BB_1 и CC_1, то прямая B_1C_1 проходит через точку P. Осталось показать, что и прямая B_2C_2 также проходит через точку P. Отметим точки D и H пересечения прямой AA_1 с прямыми B_1C_1 и PB_2. Окружность делит отрезок PH гармонически, но прямые B_1A_1 и C_1A_1 делают то же самое (центральная проекция гармонической четвёрки B_1, D, C_1, P). Следовательно, точка C_2 лежит на прямой PB_2, т.е. прямая B_2C_2 проходит через точку P.

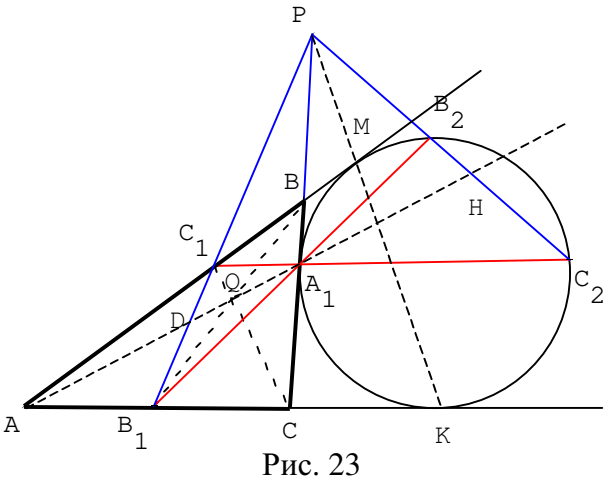

Рис. 23

10. Плоскости боковых граней попарно пересекаются по прямым AA_1, BB_1 и CC_1, следовательно, эти прямые пересекаются в одной точке P (точки пересечения плоскостей боковых граней), возможно, бесконечно удалённой. Это значит, что наш пятигранник – усечённый тетраэдр. Рассмотрим грань AA_1B_1B (рис. 24). Пусть прямые AB и A_1B_1 пересекаются в точке S, которая, очевидно, лежит на линии пересечения плоскостей основания. Прямая SC_0 – поляра точки P относительно угла B_1SB, следовательно, точка M, в которой она пересекает ребро BB_1, делит вместе с точкой P этот отрезок гармонически. Аналогично – точка K на ребре AA_1. Рассматривая две оставшиеся боковые грани, мы в каждой из них найдём поляру точки P. Пусть N – точка на ребре CC_1, гармонически сопряжённая точке P относительно этого отрезка. Положение каждой из точек K, M и N на боковом ребре определено однозначно как точки, гармонически сопряжённой точке P. Следовательно, в каждой из них пересекаются две поляры с соседних граней. Таким образом, все три поляры лежат в одной плоскости – плоскости треугольника KMN (она же – плоскость треугольника $A_0B_0C_0$), и каждая из них проходит через точку на линии пересечения плоскостей оснований. Значит, и сама эта плоскость проходит через линию пересечения плоскостей оснований.

Замечание. Плоскость $A_0B_0C_0$ обладает свойством поляры, но уже относительно двугранного угла. Такая плоскость называется ***полярной***.

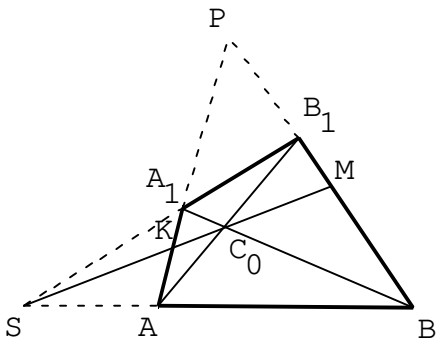

Рис. 24

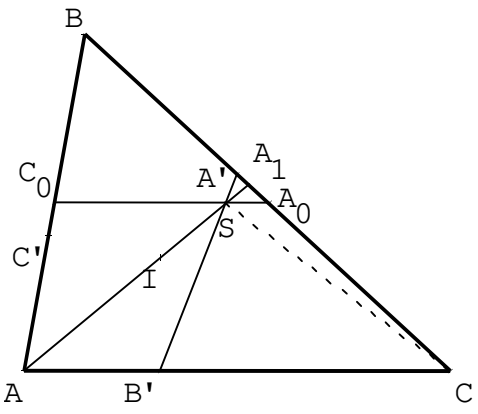

Рис. 25

11. Параметризуем треугольник с помощью отрезков касательных (рис. 25): $AB' = AC' = x$, $BC' = BA' = y$, $CB' = CA' = z$. Найдём двойное отношение четырёх точек C, A_0, A_1, A'. Нетрудно подсчитать, что: $CA_0 = \dfrac{y+z}{2}$, $A_0A_1 = \dfrac{(z-y)(z+y)}{2(2x+y+z)}$, $A_1A' = \dfrac{x(z-x)}{2x+y+z}$. Таким образом, указанное двойное отношение равно $(C, A_0, A_1, A') = -\dfrac{x}{z}$. Теперь рассмотрим четвёрку точек на прямой AC: C, A_∞, A, B' (A_∞ – это точка пересечения прямых AC и A_0C_0). Так как точка A_∞ делит отрезок AC в отношении –1, а точка B' в отношении $\dfrac{x}{z}$, то двойное отношение (C, A_∞, A, B') тоже равно $-\dfrac{x}{z}$. Если обозначить точку пересечения прямых AA_1 и $A'B'$ через S, то получится, что через точку пересечения трёх прямых AA_1, $A'B'$ и CS должна проходить и прямая A_0A_∞, она же A_0C_0.

12. Покажем, что двойные отношения четвёрок A, C_1, G, H_3 и A, B_1, E, H_2 совпадают. Аналогично решению предыдущей задачи, это будет означать, что прямые $A_{00}A$, C_1B_1, GE, H_1H_2 пересекаются в одной точке. Пусть $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, тогда (рис. 11) $AH_2 = c \cdot \cos A$, $AE = \dfrac{b+c-a}{2}$, $AB_1 = \dfrac{b \cdot c}{c+a}$. Теперь подсчитам длины отрезков для двойного отношения (A, B_1, E, H_2): $B_1E = AE - AB_1 = \dfrac{(c-a)(c+a-b)}{2(c+a)}$, $EH_2 = AH_2 - AE = \dfrac{2c \cdot \cos A - b - c + a}{2}$. После некоторых преобразований найдём, что $\dfrac{AB_1}{B_1E} \cdot \dfrac{EH_2}{H_2A} = -\dfrac{c^2 - a^2 - bc + ab}{(c-a)(c+a-b)\cos A} = -\dfrac{1}{\cos A}$. Таким образом, двойное отношение указанных точек на стороне AC определяется только величиной угла A – угла между сторонами AC и AB, а, значит, будет таким же для соответствующих точек на стороне AB.

13. Вторая касательная к вписанной окружности из точки B_1 проходит через точку E_1 (рис. 26), следовательно, прямая EE_1 – поляра точки B_1 относительно вписанной окружности. Аналогично, прямая GG_1 – поляра точки C_1. Поскольку точки B_1, C_1 и A_{00} лежат на одной прямой (задача 6), то прямые EE_1 и GG_1 пересекаются на прямой $B_{00}C_{00}$. А т.к. прямая EG проходит через точку A_{00}, то и прямая E_1G_1 также проходит через точку A_{00}.

14. Докажем, что, например, $E_1G_1 \parallel BC$. Пусть R и T – точки пересечения прямых E_1B_1 и G_1C_1 с прямой BC. $\angle BRB_1 = \angle BAB_1 = \angle CTC_1$ (рис. 26). Следовательно, $G_1T = TD = RD = RE_1$ как отрезки касательных, попарно образующих равные углы. Значит, E_1G_1TR – трапеция, а $E_1G_1 \parallel BC$.

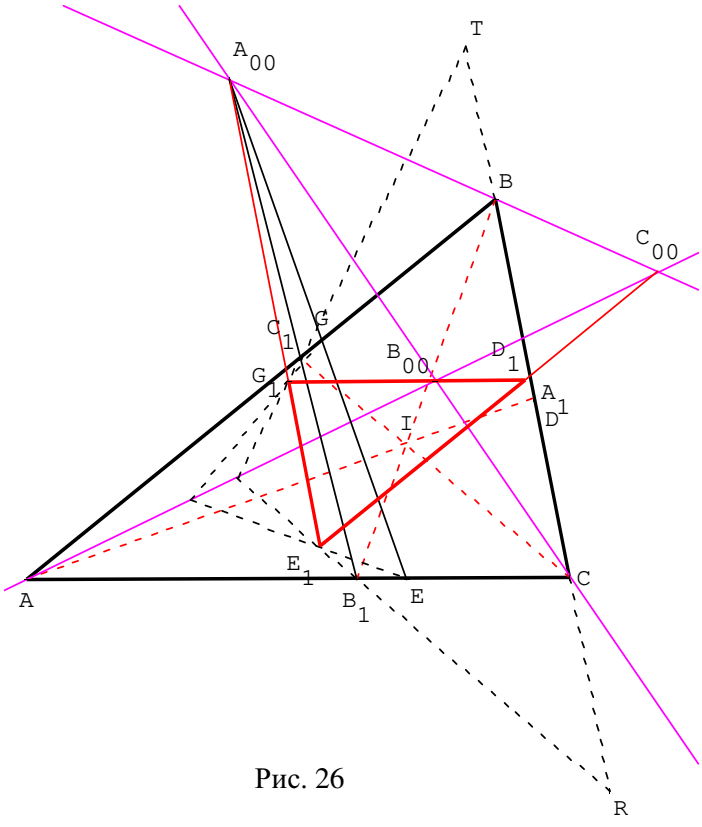

Рис. 26

15. Прямая $A_{00}E_1$ пересекает вписанную окружность в точках D_1 и E_1, а прямую $B_{00}C_{00}$ в точке S. A_{00}, D_1, S, E_1 – гармоническая четвёрка точек. Следовательно, прямые $B_{00}A_{00}$, $B_{00}D_1$, $B_{00}S$ и $B_{00}E_1$ также образуют гармоническую четвёрку. Одна из этих прямых – $B_{00}D_1$ – параллельна стороне AC (задача 14), а, значит, три оставшиеся прямые высекают на прямой AC равные отрезки, т.е. прямая $B_{00}E_1$ проходит через середину отрезка AC точку B_0. (Рис. 27) Аналогично, прямая $A_{00}G_1$

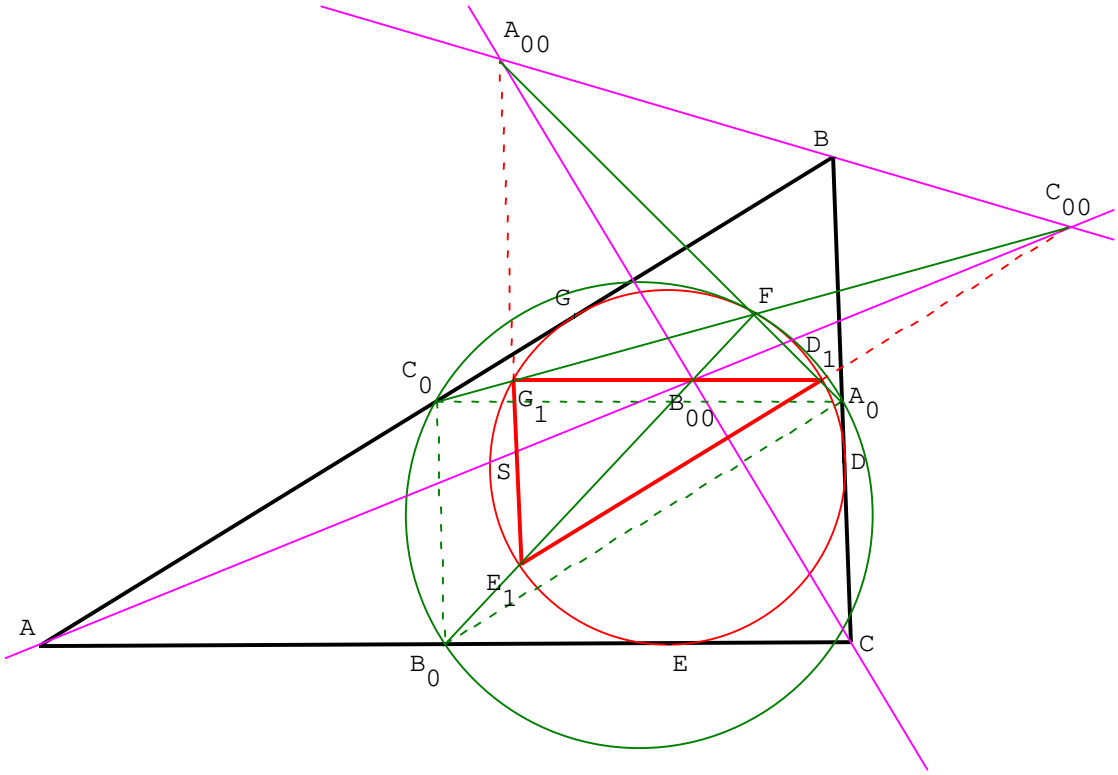

Рис. 27

проходит через точку A_0, прямая $C_{00}D_1$ – через точку C_0. Треугольники $G_1E_1D_1$ и ABC гомотетичны с отрицательным коэффициентом (задача 14), серединный треугольник $A_0B_0C_0$ и треугольник ABC гомотетичны также с отрицательным коэффициентом. Следовательно, треугольники $G_1E_1D_1$ и $A_0B_0C_0$ гомотетичны с положительным коэффициентом, т.е. гомотетичны с центром в точке F касания соответствующих им описанных окружностей (вписанной окружности и окружности девяти точек Δ ABC). Следовательно, прямые $A_{00}G_1$, $B_{00}E_1$ и $C_{00}D_1$ проходят через точку Фейербаха, ч.т.д.

16. Проведём доказательство пунктов а) и б) для общего случая, когда полюсообразующими треугольниками являются произвольные чевианные треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$.

а) Обозначим U и V точки пресечения прямых B'A' с AB, B'C' с BC соответственно (рис. 28). Из построения точек X, Y и Z ясно, что двойные отношения точек A, Z, C_1, U и V, X, A_1, C равны, следовательно, прямая ZX проходит через точку B'.

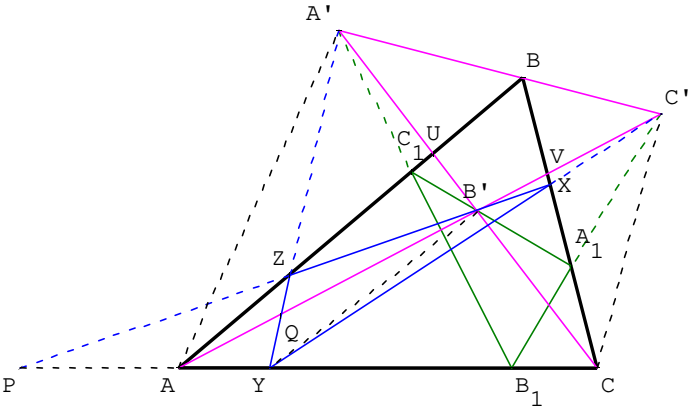

Рис. 28

б) Пусть Q – точка пересечения прямых YA' и AB', P – точка пересечения прямых AC и ZX. A', Z, Q, Y – гармоническая четвёрка, т.к. A' – полюс, а AB' – соответствующая ему поляра относительно угла BAC. Значит, прямые B'A', B'Z, B'A, B'Y образуют гармоническую четвёрку, а поскольку они пересекают прямую AC соответственно в точках C, P, A, Y, то и они тоже образуют гармоническую четвёрку. Следовательно, X, Y, Z – основания чевиан (задача 5).

Доказательство пункта в)

Чтобы доказать пункт в) теоремы, достаточно показать, что семейство окружностей, описанных около ΔXYZ, порождённого подвижной точкой Y указанным в теореме способом, имеет единственную неподвижную точку. Это будет именно точка Фейербаха, т.к. через неё проходят две различные окружности этого семейства – вписанная и окружность девяти точек. Ближайшая наша цель – показать, что в это семейство входят ещё и три прямые, т.е. подвижная окружность трижды "распрямляется", проходя все свои положения, и эти прямые заведомо проходят через точку Фейербаха.

Покажем, например, прямая $A_{00}A_0$ – это "окружность" из нашего семейства. Действительно, если одно из оснований чевиан, например, точка X становится бесконечно удалённой точкой прямой BC, то стороны ZX и YX превращаются в параллельные BC прямые (рис. 29). Пусть R – точка пересечения прямых XY и $A_{00}B_0$. Так как точки C_{00}, Y, R, X составляют гармоническую четвёрку, а X – бесконечно удалённая точка, то $C_{00}Y = YR$. Но отрезок $C_{00}R$ параллелен отрезку BC. Следовательно, прямая $A_{00}Y$ делит пополам и отрезок BC, а, значит, совпадает с прямой $A_{00}A_0$. Окружность же, проходящая через точки Y, Z и бесконечно удалённую точку X, имеет бесконечный радиус, т.е. вырождается в прямую YZ (в данном случае совпадающую с прямой $A_{00}A_0$).

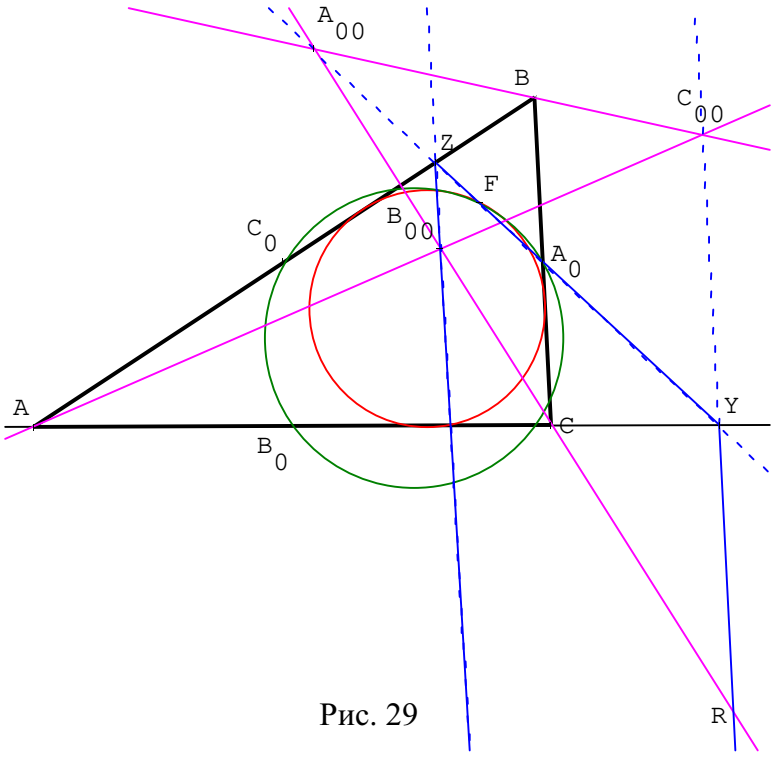

Рис. 29

Итак, семейство Фейербаха пополнилось тремя прямыми A_0A_{00}, B_0B_{00} и C_0C_{00} (прямыми, соединяющими полюсы с серединами сторон).

Введём на плоскости систему координат (x, y) так, чтобы ось абсцисс совпадала с прямой AC. Пусть точка Y имеет координаты $(t, 0)$. Тогда координаты точек Z и X имеют вид $\left(\frac{p_1t+q_1}{a_1t+b_1}, \frac{r_1t+s_1}{a_1t+b_1}\right)$ и $\left(\frac{p_2t+q_2}{a_2t+b_2}, \frac{r_2t+s_2}{a_2t+b_2}\right)$, т.е. являются дробно-линейными функциями от t (в этом легко убедиться). Покажем, что семейство Фейербаха – однопараметрическое семейство, определяемое уравнением третьей степени. Для этого нужно записать уравнение окружности, проходящей через точки X, Y и Z с координатами, определёнными выше. Наиболее компактно это можно сделать с помощью определителей.

Как известно, уравнение окружности, проходящей через три точки (x_1, y_1), (x_2, y_2) и (x_3, y_3), задаётся с помощью определителя четвёртого порядка следующим уравнением $\Delta(x, y) = 0$, где

$$\Delta(x,y)=\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Раскладывая определитель по первой строке, преобразуем уравнение к виду

$$s\cdot\left(x^2+y^2\right)+a\cdot x+b\cdot y+c=0,$$

где коэффициент $s=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ геометрический смысл которого – удвоенная ориентированная площадь треугольника с вершинами (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3).

Определим вид коэффициентов *s, a, b, c* при подстановке координат точек Y, Z и X. Так, например,

$$s=\begin{vmatrix} t & 0 & 1 \\ \dfrac{p_1t+q_1}{a_1t+b_1} & \dfrac{r_1t+s_1}{a_1t+b_1} & 1 \\ \dfrac{p_2t+q_2}{a_2t+b_2} & \dfrac{r_2t+s_2}{a_2t+b_2} & 1 \end{vmatrix}=\frac{P_3(t)}{(a_1t+b_1)(a_2t+b_2)},$$ где $P_3(t)$ – многочлен 3-й степени от t.

Корни знаменателя, а также $t = \infty$ обращают s в бесконечность. Это соответствует бесконечной площади $\triangle XYZ$, когда одна из его вершин становится бесконечно удалённой. Корни числителя обращают s в ноль. Это происходит в тех случаях, когда две вершины $\triangle XYZ$ сливаются с одной из вершин $\triangle ABC$ (в определителе s две одинаковые строки).

Вычисляя таким же образом коэффициенты *a, b* и *c*, наше уравнение можно записать в виде

$$\frac{P_3(t)}{(a_1t+b_1)(a_2t+b_2)}\left(x^2+y^2\right)+\frac{P_3(t)Q_3(t)}{(a_1t+b_1)^2(a_2t+b_2)^2}x+$$
$$+\frac{P_3(t)R_3(t)}{(a_1t+b_1)^2(a_2t+b_2)^2}y+\frac{P_3(t)S_3(t)}{(a_1t+b_1)^2(a_2t+b_2)^2}=0,$$

где $Q_3(t)$, $R_3(t)$ и $S_3(t)$ – многочлены 3-й степени от t, а многочлен $P_3(t)$ – общий множитель у всех коэффициентов, т.к. все они обращаются в ноль, когда сливаются две из трёх точек X, Y, Z (в определителе Δ две одинаковые строки).

Умножим обе части уравнения на $\dfrac{(a_1t+b_1)^2(a_2t+b_2)^2}{P_3(t)}$ и покажем, что полученное таким образом уравнение $(a_1t+b_1)(a_2t+b_2)(x^2+y^2)+Q_3(t)x+R_3(t)y+S_3(t)=0$ описывает всё наше семейство окружностей, за исключением одной линии (прямой $B_{00}B_0$).

Посмотрим, как ведёт себя окружность, проходящая через точки X, Y, Z, когда, двигаясь по прямой AC, тока Y проходит через точку A, т.е. совпадает с точкой Z (рис. 30), и при этом многочлен $P_3(t)$ обращается в ноль. В этом случае окружность (по двум точкам), вообще говоря, определить нельзя. Но из соображений непрерывности коэффициентов последнего уравнения ясно, что при соответствующем значении t это тоже будет уравнение окружности, при этом секущая ZY превращается в касательную. Таким образом, это будет окружность, проходящая через точку X и касающаяся прямой AA_{00}. Далее, при двух конечных значениях t, когда коэффициент при x^2+y^2 обращается в ноль, это уравнение определяет прямые $A_{00}A_0$ и $C_{00}C_0$. (Прямая $B_{00}B_0$ является предельной для нашего семейства при $t=\infty$.)

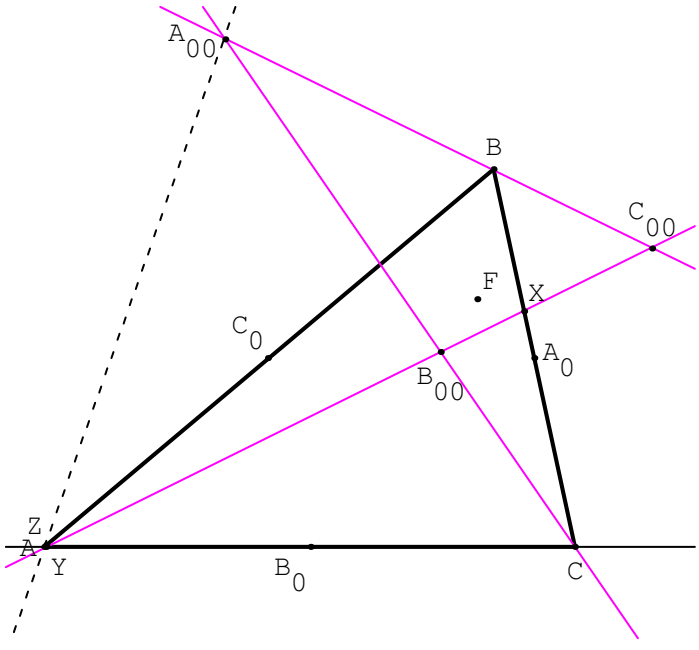

Рис. 30

Эти прямые, а также вписанная окружность и окружность девяти точек – четыре линии, соответствующие различным значениям t – имеют общую точку – точку Фейербаха. Подставив координаты этой точки в наше уравнение, мы получим уравнение от t, имеющее не более чем три различных корня. Отсюда следует, что точка Фейербаха является неподвижной точкой этого семейства (и понятно, что единственной). На этом доказательство теоремы заканчивается.

17. Из задачи 12 следует, что прямая, проходящая через два основания биссектрис, проходит и через соответствующий полюс треугольника, определённый в теореме (задача 16). Отсюда по теореме следует, что окружность, проходящая через основания биссектрис, содержится в семействе Фейербаха.

18. Если в задаче 12 основания биссектрис B_1 и C_1 заменить на точки касания вневписанных окружностей B_2 и C_2, то легко показать, что двойные отношения четвёрок A, C_2, G, H_3 и A, B_2, E, H_2 также совпадают. Следовательно, окружность, проходящая через точки касания вневписанных окружностей, содержится в семействе Фейербаха.

19. Пусть A', B', C' – полюсы, порождённые треугольником Жергонна и серединным треугольником. Докажем, например, что AA' ‖ BB'. Прямая B'C' – поляра точки A' относительно угла BAC, значит, AA', AB, AC', AC – гармоническая четвёрка прямых. На прямой BB' три из них – AB, AC', AC – высекают равные отрезки (B' лежит на средней линии). Следовательно, AA' ‖ BB'.

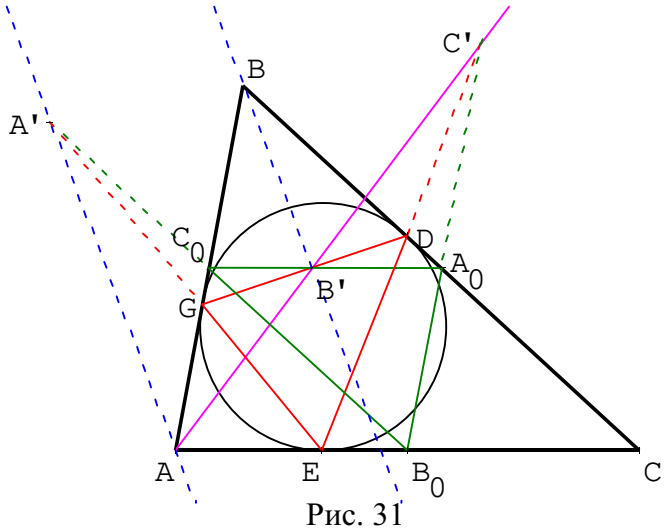

Рис. 31

20. Пусть H_2H_3 – сторона ортотреугольника, EG – сторона треугольника Жергонна, как на рис. 11. Прямая H_2H_3 антипараллельна BC. При отражении прямой H_2H_3 относительно прямой EG мы получим прямую, параллельную BC и проходящую через точку пересечения A_{00} прямых H_2H_3 и EG. Такая прямая уже встречалась нам в задаче 13 – это прямая E_1G_1. Следовательно, $\Delta D_1E_1G_1$ (рис. 12) с вершинами на вписанной окружности и есть искомый.