ПРОЕКЦИИ СКРЕЩИВАЮЩИХСЯ ПРЯМЫХ

А. Гайфуллин, А. Скопенков, М. Скопенков и А. Шаповалов

So also werde ich alles in Erinnerung behalten:

Nur ein kleines Album von Miniaturen.

H. Böll, Im Tal der donnernden Hufe.

Вводные задачи.

0. Существует ли в пространстве одна или несколько замкнутых ломаных, дающие при проекции на плоскость данную картинку (см. рис. 0)? При этом каждое звено ломаной должно проецироваться в *целое* звено проекции.

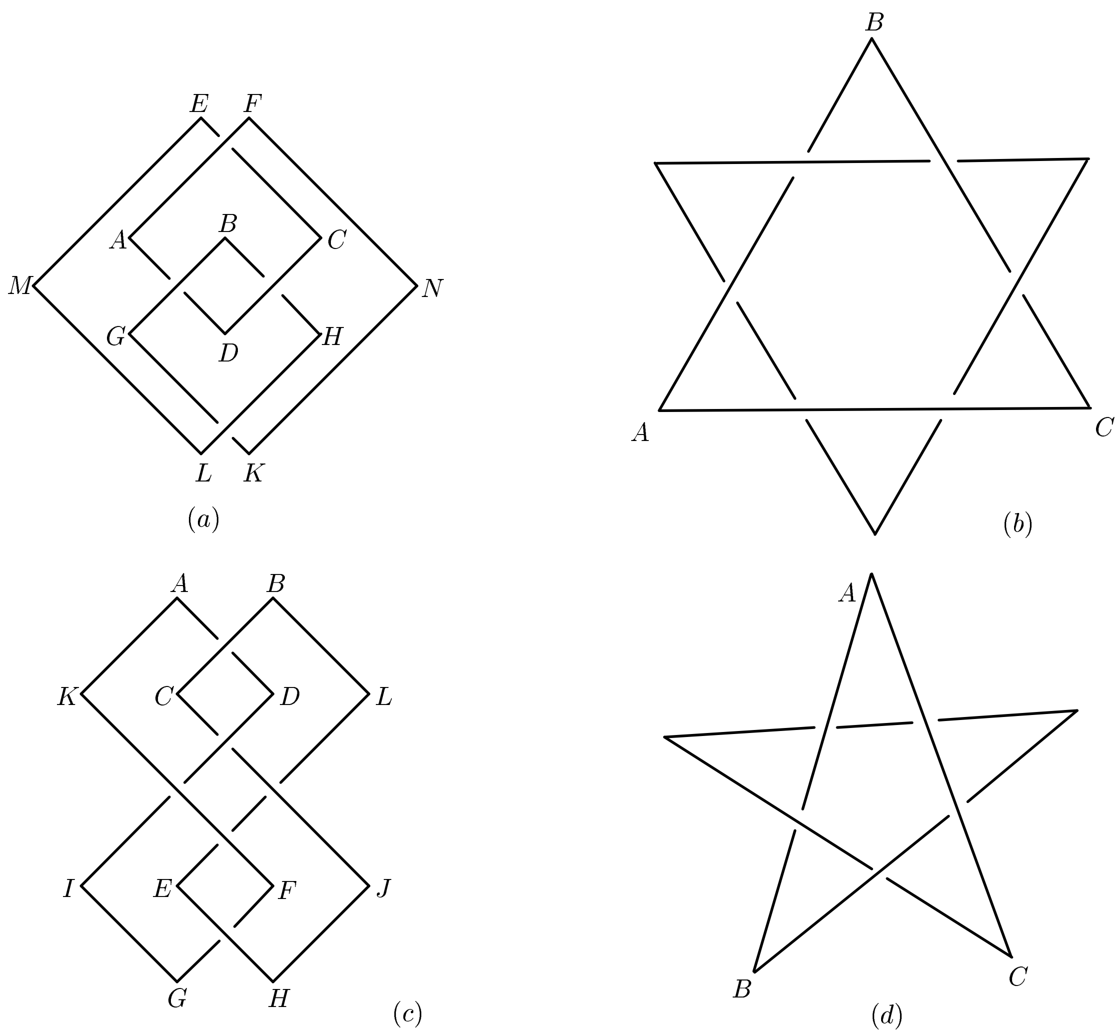

Рис 0. / Fig. 0

1. Существует ли семейство прямых в пространстве, которые при проектировании на некоторую плоскость дают данную картинку (см. рис. 1)?

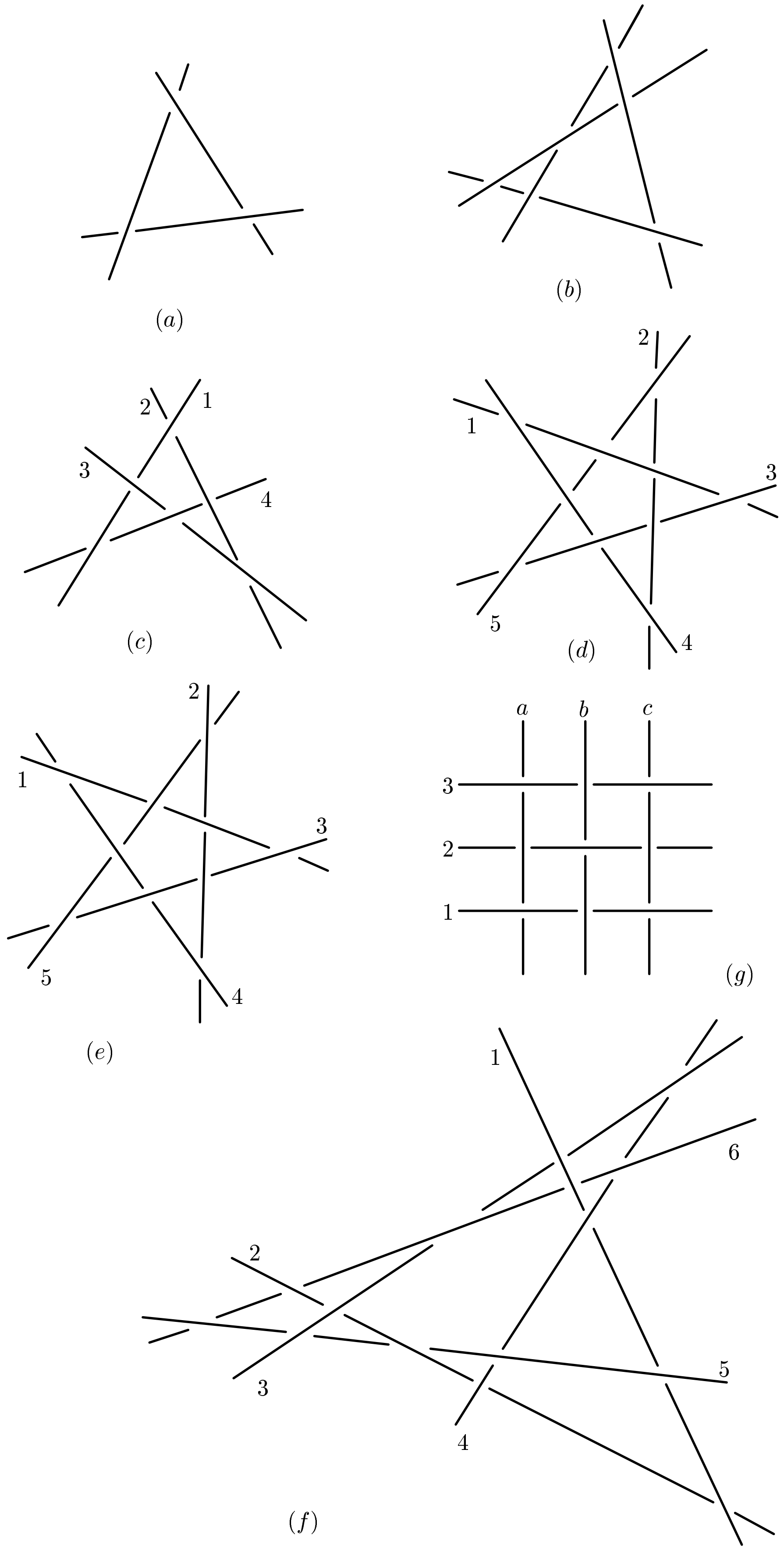

Рис. 1 / Fig. 1

Определения. Пусть на плоскости задано семейство прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке. Нарисуем в местах пересечения прямых, что одна из прямых "проходит выше". Полученная (плоская!) картинка называется *плетенкой.* Плетенки *равны*, если они переводятся друг в друга подобием. Плетенка называется *реализуемой*, если существует набор прямых в пространстве, дающий при проекции на некоторую плоскость данную плетенку.

Если условие задачи является формулировкой утверждения, то подразумевается, что это утверждение нужно доказать.

Определение. Прямая в плетенке называется *монотонной*, если на ней существует такая точка, что с одной стороны от нее прямая проходит выше всех, а с другой — ниже. В частности, прямая, проходящая выше всех остальных или ниже всех остальных, тоже считается монотонной.

2. Реализуемость плетенки не меняется при отбрасывании монотонной прямой.

3. a) Если плетенка состоит из 1, 2 или 3 прямых, то каждая ее прямая монотонна.

b) Если плетенка состоит из 4 или 5 прямых и каждая ее прямая не монотонна, то плетенка не реализуема.

c) Существует реализуемая плетенка из 6 не монотонных прямых.

d) Существует бесконечно много реализуемых плетенок без монотонных прямых, которые состоят из разного количества прямых.

Определение. Если плетенку B можно получить, выкинув одну или несколько прямых из плетенки A, то B называется *подплетенкой* плетенки A.

4. a) Плетенка, содержащая нереализуемую подплетенку, сама является нереализуемой.

b) Существует нереализуемая плетенка, все подплетенки которой реализуемы.

c) Существует бесконечно много нереализуемых плетенок (с разным количеством прямых), все подплетенки которых реализуемы.

d) Для любого $n \geq 4$ существует нереализуемая плетенка из n прямых, все подплетенки которой реализуемы.

5. Пусть каждая прямая плетенки параллельна либо оси Ox, либо оси Oy.

a) Существует ли нереализуемая плетенка такого типа, в которой нет подплетенки вида 1g?

b)* Найдите критерий реализуемости таких плетенок.

6.* В этой "физической" задаче мы не приводим аккуратной формулировки условия и не требуем аккуратного доказательства. Важно не столько решить данную задачу, сколько использовать ее для проведения эксперимента путем построения моделей и получения ответа в других задачах (но не для их строгого доказательства!).

a) Пусть мы имеем достаточно много длинных тонких упругих прутьев (или полосок). Составим из них (слегка изгибая прутья) фигуру, изображающую данную плетенку. Предположим, что получилась жесткая конструкция, то есть фигуру можно подвесить за одну точку так, чтобы она не распалась. Тогда соответствующая плетенка не реализуема.

b) Плетенка реализуема тогда и только тогда, когда построенная в (a) конструкция не содержит жестких подконструкций.

Промежуточный финиш.

После промежуточного финиша участники могли представить решения задач 3.d, 4.c, 5.ab, 6.ab, 7, 8, 9.ab, 10,11,12,13,14abcd,15.abcd. В задачах 3.d и 4.c был приведен только пример, а решение можно было сдать и после промежуточного финиша.

7. Реализуемость плетенки не изменяется при

a) замене плетенки на равную ей;

b) изменении всех пересечений прямых на противоположные (прямая, проходившая "выше", будет проходить "ниже" и наоборот);

c)* аффинном преобразовании;

d)* проективном преобразовании, если по одну сторону от образа бесконечно удаленной прямой при этом преобразовании заменить все пересечения прямых на противоположные.

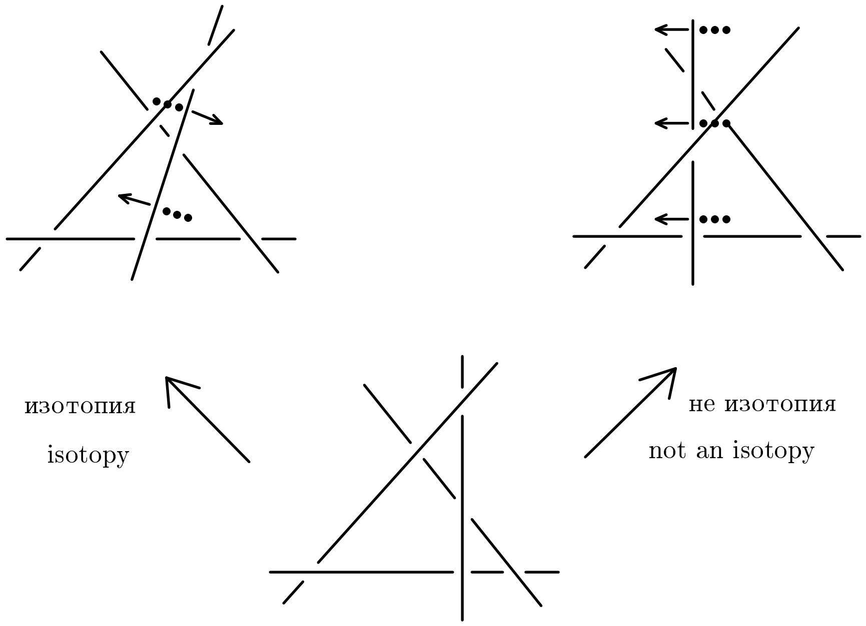

Рис. 2 / Fig. 2

Возьмем плетенку и будем непрерывно двигать ее прямые (по одной или несколько одновременно) так, чтобы они оставались прямыми, типы пересечений не менялись, параллельные оставались параллельными, пересекающиеся — пересекающимися, и ни одна прямая не проходила через точки пересечения других прямых (см. пример на рис. 2). Такое преобразование плетенки называется *изотопией*, а начальная и конечная плетенка — *изотопными*.

На рис. 0 и 1 картинки и плетенки заданы с точностью до изотопии.

8. Рассмотрим плетенку, изотопную плетенке на рис. 1.f, и диагонали AD, BE и CF шестиугольника $ABCDEF$.

a) Если диагонали пересекаются в одной точке так, как на рис.3.a, то плетенка не реализуема.

b) Если диагонали пересекают друг друга так, как на рис. 3.b, то плетенка не реализуема.

c) Если диагонали пересекают друг друга так, как на рис. 3.c, то плетенка реализуема.

d) Существуют две изотопные плетенки, одна из которых реализуема, а другая нет (эту задачу можно решить и другим способом, отличным от намеченного в пунктах a,b,c)

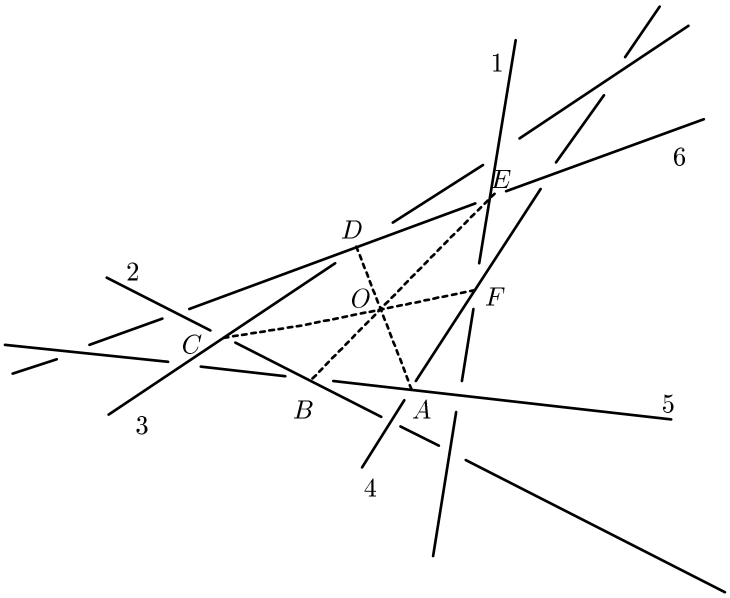

Рис. 3a / Fig. 3a

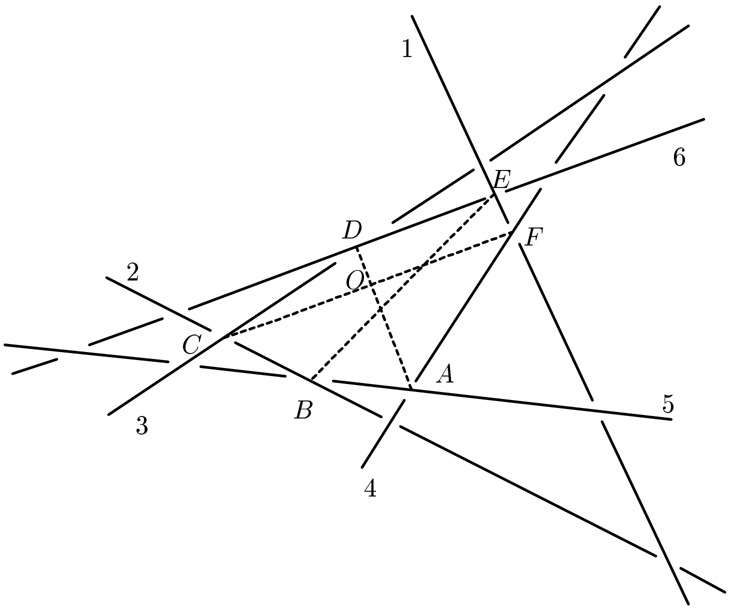

Рис. 3b / Fig. 3b

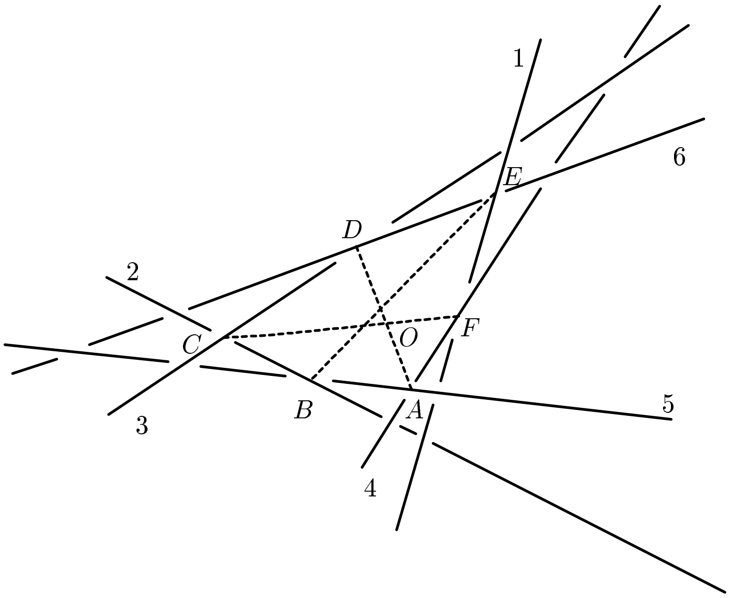

Рис. 3c / Fig. 3c

Определение. Предположим, что в плетенке выделены две прямые l_1 и l_2 и выбрана ориентация на всех остальных прямых. Разрешается двигаться по прямым плетенки в направлении их ориентации (по прямым l_1 и l_2 можно двигаться в произвольном направлении) и переходить с одной прямой на другую, если первая прямая проходит в этой точке "выше" второй. Назовем плетенку *ациклической*, если для любого выбора прямых l_1 и l_2 и ориентаций на оставшихся прямых нельзя пройти по замкнутому маршруту и вернуться в исходную точку.

9 a) Всякая реализуемая плетенка ациклична.

b)* Верно ли, что для любой ациклической плетенки некоторая изотопная ей плетенка реализуема?

10.* Существует бесконечная последовательность реализуемых плетенок, в которой каждая плетенка не изотопна остальным и подплетенкам остальных.

Определения. Сплетение — это неупорядоченный набор попарно скрещивающихся неориентированных прямых в пространстве.

(Пространственная) изотопия набора попарно скрещивающихся прямых — это такое непрерывное движение прямых набора, в процессе которого они остаются попарно скрещивающимися.

11. Если $p = 4k+3$, где k — любое целое, то всякое сплетение из p прямых не изотопно своему зеркальному образу (указание: см. задачи 12 и 13).

Определение. Пусть дана упорядоченная пара ориентированных скрещивающихся прямых. Спроектируем эту пару на плоскость общего положения. Если полученная ориентированная плетенка такова, как на рис. 4.a, то *коэффициент зацепления* этой пары равен -1, иначе $+1$.

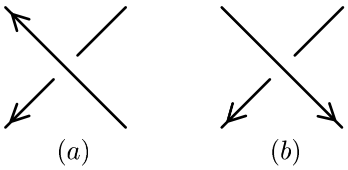

Рис. 4 / Fig. 4

12. a) Коэффициент зацепления не зависит от выбора плоскости проекции и сохраняется при одновременном изменении ориентации обеих ориентированных прямых.

b) Коэффициент зацепления упорядоченной пары ориентированных прямых не изменяется при изотопии.

c) Две упорядоченные пары ориентированных скрещивающихся прямых изотопны тогда и только тогда, когда их коэффициенты зацепления равны.

d)* Тройки ориентированных попарно скрещивающихся прямых изотопны тогда и только тогда, когда их попарные коэффициенты зацепления равны.

Определение. Коэффициент зацепления упорядоченной тройки ориентированных попарно скрещивающихся прямых — это произведение трех попарных коэффициентов зацепления.

13. a) Коэффициент зацепления тройки ориентированных прямых не зависит от выбора упорядочивания и ориентаций прямых.

b) Зеркальная симметрия пространства изменяет коэффициент зацепления как пары, так и тройки прямых.

c) Набор из p прямых содержит $p(p-1)(p-2)/6$ троек прямых.

d) Число $p(p-1)(p-2)/6$ нечетно тогда и только тогда, когда $p = 4k+3$, где k — целое.

Историческое замечание. Настоящий цикл элементарных задач появился в *алгебраической теории узлов* [Maz88, ViDr88, Vir85]. Основными результатами нашего цикла являются задачи 4.cd (А. Скопенков, 1989 [Kva89]) и 8 (Г. Гальперин и А. Скопенков, 1988; приведенные здесь решения получены А.Гайфуллиным в 2001 г.). Интересные нерешенные задачи — 5, 9.b и 10.

Благодарности. Мы благодарим А. Б. Сосинского и А. Таламбуцу за полезные обсуждения и А.Кулыгина за подготовку компьютерной верстки.

References

[Maz88] В. Мазуровский, Записки научных семинаров ЛОМИ **187** (1988), 121–134.

[PrSh88] В. В. Прасолов, И. Ф. Шарыгин, *Задачи по стереометрии.*

[Tab88] С. Л. Табачников, *М1085абв*, Квант **5** (1988).

[Tab89] С. Л. Табачников, *Линейные неравенства и задача М1085*, Квант **6** (1989), 38,60.

[ViDr88] О. Я. Виро, Ю. В. Дроботухина, *Сплетения скрещивающихся кривых*, Квант **3** (1988), 12–19.

[Vir85] О. Я. Виро, ДАН СССР **284:5** (1985), 1049–1052.

[Kva89] *Нам пишут: Еще раз о сплетающихся прямых*, Квант **11** (1989), 33 .

Решения задач, рассказанные на промежуточном финише.

0. b),d) Ответ: нет. Объявим плоскость ABC горизонтальной и начнем последовательно выяснять про остальные концы и точки пересечения, выше или ниже плоскости ABC они лежат. Быстро придем к противоречию.

a),c) Ответ: да.

Заметим, что при изменении высоты вершины ломаной проекция не изменяется. Если в проекции получаются два пересекающихся отрезка, то зафиксировав три конца отрезков и меняя высоту четвертого конца, мы можем получить нужный нам тип пересечения.

(a) Построим ломаную в пространстве для любой проекции вида 0a. Сперва расположим вершины A, B, C, D, E на высоте 0. Расположив H на высоте -1, добьемся, что отрезок BH пройдет под CD. Расположив вершины F и G на высоте 1, получим отрезки AF и BG проходящие над CE и AD соответственно. Теперь нетрудно выбрать высоты вершин K и L так, чтобы HL прошел над GK. Наконец, высоты вершин M и N можно выбрать произвольно.

(c) Построим ломаную в пространстве для любой проекции вида 0c. Выберем высоты вершин A, B, C, D чтобы AD шел над BC, и высоты E, F, G, H чтобы EH шел над FG. Затем выберем высоты вершин I, J чтобы DI шел над CJ. Наконец, выберем высоту K чтобы FK шел над DI, затем высоту L чтобы EL прошел под FK и CJ.

1. a),b) Ответ: да. Следует из задачи 2. □

c) [Tab88] Ответ: нет. Допустим, что требуемое расположение (рис. 1.c) существует. "Опустим" прямую 1 в вертикальной плоскости, не задевая прямую 3, так, чтобы она пересекла прямые 2 и 4 (рис. 5). Затем аналогично "опустим" прямую 3 так, чтобы она пересекла прямые 1 и 4. Наконец, повернем прямую 2 в вертикальной плоскости вокруг ее точки пересечения с прямой 1 так, чтобы она пересекла прямую 3. При этом прямая 2 будет по-прежнему проходить под прямой 4. Но в то же время прямые 2 и 4 должны пересекаться, т.к. каждая из них пересекает прямые 1 и 3. Следовательно, все четыре прямые должны лежать в одной плоскости. Противоречие. □

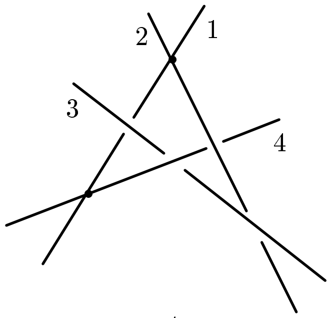

Рис. 5 / Fig. 5

d) Ответ: нет. Эта плетенка содержит плетенку на рис. 1.c в качестве подплетенки. □

e) Ответ: нет. Доказательство аналогично задаче 4c.

f) Ответ: да. Очевидно, что если из данной плетенки выкинуть прямую 2, она станет реализуемой. Рассмотрим 5 прямых m_1, m_3, m_4, m_5, m_6, дающих при проекции на горизонтальную плоскость плетенку на рис. 1.f с выкинутой прямой 2. Пусть m_2 — прямая, пересекающая прямые m_3 и m_5 и проектирующаяся в прямую 2. Будем двигать прямую 2 параллельно самой себе по направлению к точке пересечения прямых 3 и 5. При этом прямую m_2 будем двигать так, чтобы она все время пересекала прямые m_3 и m_5 и проектировалась в прямую 2. Начиная с некоторого момента прямая m_2 будет проходить над прямой m_6 и под прямыми m_1 и m_4. Немного повернем ее в вертикальной плоскости так, чтобы она стала проходить под прямой m_3 и над прямой m_5. Получим набор прямых $m_1, \ldots, m_6$ дающий при проекции на горизонтальную плоскость плетенку, изотопную данной. □

g) [Tab88] Ответ: нет. Допустим, что рассматриваемая конфигурация возможна. Передвигая прямые в вертикальных плоскостях, как в задаче 1.c, мы можем добиться, чтобы каждая из прямых a, b, c пересекала каждую из прямых l_1, l_2, а l_3 пересекалась с a и b (рис. 6.a). Пусть $A_1, A_2, \ldots, C_2$ — точки пересечения прямых a и l_1, a и $l_2, \ldots, c$ и l_2; теми же буквами обозначаются и проекции этих точек на плоскость плетенки. Спроектируем всю конфигурацию на вертикальную плоскость λ, содержащую прямую l_3, вдоль прямой c (рис. 6.b). Прямая c при этом проектируется в точку C. Докажем, что эта точка лежит на прямой l_3 — это бы означало, что c и l_3 пересекаются, и противоречило предположению. Вертикальные плоскости, содержащие прямые a, b и c, параллельны (так как проекции прямых a, b и c на плоскость плетенки параллельны), поэтому и проекции a и b вдоль c на плоскость λ параллельны. Кроме того, в плетенке $A_1A_2 : A_2A_3 = B_1B_2 : B_2B_3$, а следовательно, это верно и для самой конфигурации, а значит, и для рис. 6.b (при параллельной проекции отношения длин параллельных отрезков сохраняются). Отсюда очевидно, что на рис. 6.b прямая A_3B_3 проходит через точку C, что и требовалось доказать. □

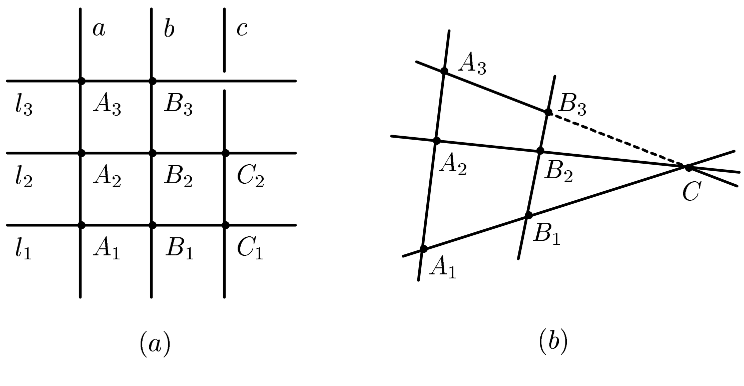

Рис. 6 / Fig. 6

2. Пусть P — плетенка с монотонной прямой, P' — плетенка, получающаяся из нее при выкидывании этой прямой. Очевидно, что если P реализуема, то P' реализуема. Докажем обратное. Предположим, что P' реализуема. Рассмотрим соответствующее расположение прямых в пространстве. На монотонной прямой плетенки P (лежащей в горизонтальной плоскости) отметим точку, с одной стороны от которой эта прямая проходит "выше" остальных прямых плетенки P, а с другой — "ниже". Проведем через эту точку вертикальную прямую и немного наклоним ее. Получим расположение прямых, дающее в проекции на горизонтальную плоскость плетенку P. □

3. a) Очевидно, так как каждая прямая плетенки пересекается только с двумя другими прямыми плетенки. □

b) Любая плетенка из 4 не монтонных прямых изотопна плетенке на рис. 1.c или симметричной ей относительно некоторой оси, а значит, нереализуема. Любой набор 5 прямых общего положения на плоскости переводится проективным преобразованием в "звездочку". Любая такая плетенка из 5 не монотонных прямых либо содержит подплетенку из 4 не монотонных прямых, либо с точностью до изотопии и осевой симметрии совпадает с плетенкой на рис. 1.e. В любом случае она нереализуема. □

c) Например, плетенка на рис. 1.f. □

4. a) Очевидно. □ b) Например, плетенка на рис. 1.c. □

Решения задач, рассказанные после промежуточного финиша.

3.d) Первое решение. Для любого набора прямых в пространстве, дающего в проекции плетенку без монотонных прямых, построим такой набор с удвоенным числом прямых. А именно, сдвинем все прямые на один и тот же вектор, параллельнный плоскости проекции, отследив, чтобы ни одна из новых прямых не пересекла старую (подумайте, почему это всегда возможно). Тогда и в проекции набора из новых прямых все прямые будут не монотонными, тем более они не монотонны в проекции объединения наборов.

Второе решение. Докажем по индукции по n, что при $n > 1$ существует реализуемая плетенка из $3n$ не монтонных прямых. При $n = 2$ это следует из задачи 1.f. Пусть $n > 2$ и P — плетенка из $3n - 3$ не монтонных прямых. Проведем в плоскости плетенки P произвольную прямую l, не параллельную никакой прямой плетенки P и не проходящую ни через какую точку пересечения двух прямых из P. Пусть A и B — две точки пересечения прямой l с прямыми плетенки P, такие что все остальные точки пересечения прямой l с прямыми плетенки P лежат на отрезке AB. Дополним плетенку P тремя прямыми, близкими к l, пересекающимися в трех точках вблизи продолжения отрезка AB за точку B. Расставим проходы и переходы так: на пересечениях этих трех прямых — как на рис. 1.a, в точках пересечения этих трех прямых с прямой из P, пересекающей l в точке A они проходят "ниже", а в точках пересечения с остальными прямыми из P — "выше". Полученная плетенка из $3n$ прямых не содержит монотонных прямых, но реализуема. В самом деле, можно взять в пространстве три близких прямых, дающих при проекции на плоскость плетенки P плетенку, изотопную плетенке на рис. 1.a и "вставить" эти три прямые в расположение прямых, дающее при проекции на эту плоскость плетенку P. □

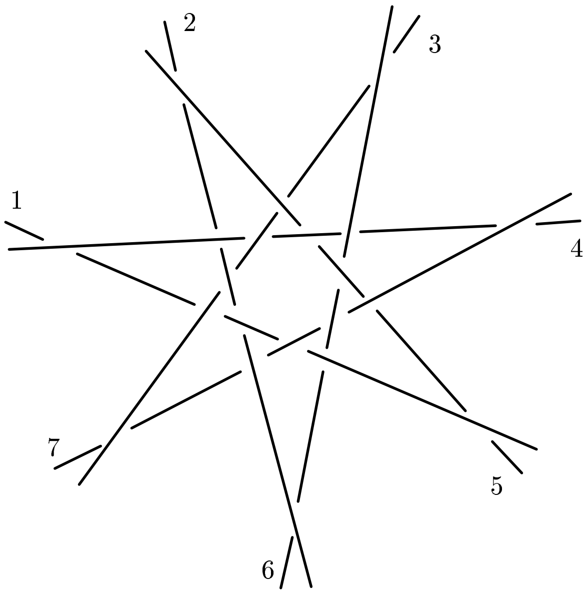

Рис.7 / Fig. 7

4.c) Построим последовательность плетенок L_n с требуемым свойством. Плетенка L_n будет состоять из $2n+1$ прямых — продолжений самых длинных диагоналей правильного $(2n+1)-$угольника. На рисунках 1.e, 7 и 8 изображены плетенки L_2, L_3 и L_4. Заметим, что пересечения каждой прямой плетенки L_n с остальными прямыми устроены одинаково: если идти так, чтобы центр $(2n + 1)-$угольника оставался слева, то сначала прямая проходит $(n - 1)$ раз "под", потом один раз "над", затем опять "под" и наконец $(n - 1)$ раз "над"(рисунок 9).

Докажем нереализуемость плетенки L_4, в общем случае доказательство аналогично. Предположим, что наша плетенка является проекцией некоторого набора прямых в пространстве. Возьмем на прямой 1 точку A, которая проецируется в точку пересечения проекций прямых 1 и 2. и повернем прямую 1 в вертикальной плоскости вокруг точки A, до пересечения с прямой 2. Аналогично, повернем прямую 2 до пересечения с прямой 3, ..., повернем прямую 9 до пересечения с прямой 1. Докажем нереализуемость полученной картинки. Направим ось z вниз перпендикулярно прямым 1 and 2. Пусть p — плоскость, проходящая через прямые 1 и 2. Докажем, что z-координата возрастает при движении вдоль прямых 3,4 ..., 9 по часовой стрелке вокруг центрального девятиугольника, и тем самым придем к противоречию. Сначала докажем это для прямых 3, 4, 5. Заметим, что точка каждой из прямых 3, 4, 5, проецирующаяся в точку пересечения с проекцией прямой 1, находится выше плоскости p, при этом каждая из прямых 3, 4, 5 пересекает девятиугольник не выше плоскости p (это очевидно для прямой 3, и доказывается по индукции для остальных прямых). Для прямых 9, 8, 7 доказательство аналогично. Остается заметить, что прямая 6 проходит выше прямой 1 и ниже прямой 2, и нереализуемость плетенки доказана.

Докажем теперь реализуемость всех подплетенок. Заметим, что после выбрасывания прямой l_{n+1} прямые l_n and l_{n+2} становятся монотонными. Далее, после выбрасывания l_{n-k+2} и l_{n+k} монотонными становятся прямые l_{n-k+1} и l_{n+k+1}. Отсюда согласно задаче 2, плетенка, получающаяся из L_n выбрасыванием прямой l_{n+1}, реализуема. $\square$

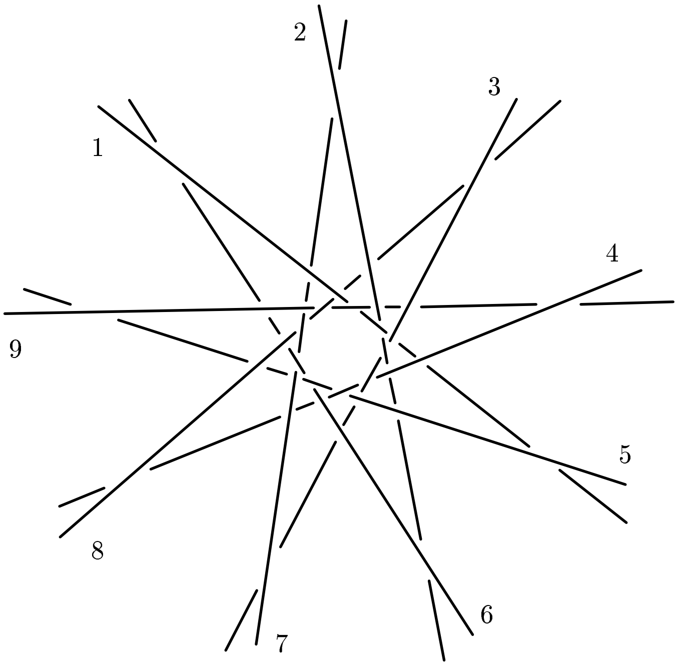

Рис. 8 / Fig. 8

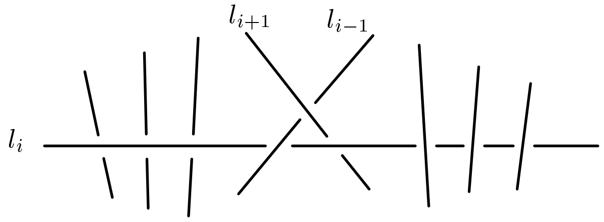

Рис. 9 / Fig. 9

7. а) Пусть P_1 и P_2 — две равные плетенки на горизонтальной плоскости, f — преобразование подобия плоскости, переводящее P_1 в P_2. Тогда f однозначно продолжается до преобразования подобия пространства F, которое переводит верхнее полупространство в верхнее, а нижнее — в нижнее. Пусть P_1 реализуема и A_1 — множество прямых в пространстве, дающее при проекции на горизонтальную плоскость плетенку P_1. Тогда множество прямых $A_2 = F(A_1)$ дает при проекции на горизонтальную плоскость плетенку P_2. Следовательно P_2 тоже реализуема. $\square$

b) Пусть плетенка P' получается из плетенки P заменой всех пересечений на противоположные. Предположим, что P реализуема. Рассмотрим семейство прямых, дающее при проекции на некоторую плоскость плетенку P. Отразим его относительно этой плоскости. Получим семейство прямых, дающее при проекции на эту плоскость плетенку P'. $\square$

c) Решение аналогично решению задачи 7.a. $\square$

d) Любое проективное преобразование представляется в виде композиции аффинного преобразования и центральной проекции в пространстве с одной плоскости на другую . Поэтому достаточно доказать наше утверждение для случая, когда наше проективное преобразование является центральной проекцией плоскости π на плоскость π' с центром в точке $O \notin (\pi \cup \pi')$. Так как исходная плетенка P реализуема, то существует семейство A прямых в пространстве, которое при проекции на плоскость π дает плетенку P. При этом можно считать, что A лежит в малой окрестности плоскости π. Проекция с плоскости π на плоскость π' с центром O продолжается до проективного преобразования f пространства. Обозначим через l прямую пересечения плоскости π' с плоскостью, проходящей через точку O параллельно плоскости π. Тогда l является f-образом одной из бесконечно удаленных прямых. Если прямая $n \in A$ проходит выше прямой $m \in A$, то прямая $f(n)$ будет проходить выше прямой $f(m)$, если точка пересечения их проекций на плоскость π' лежит по одну сторону от прямой l, и ниже — если по другую. Поэтому семейство $f(A)$ прямых проецируется на плоскость π' в плетенку P', т.е. P' реализуема. $\square$

8. a),b) Допустим, эта плетенка реализуема. Рассмотрим прямые 1 — 6 в пространстве. Повернем прямую 2 в вертикальной плоскости относительно точки, которая проектируется в точку пересечения проекций прямых 2 и 6, так чтобы она пересекла прямую 5. Аналогично повернем прямые 4 и 6, так чтобы они пересекли прямые 1 и 3 соответственно. Повернем прямую 5 в вертикальной плоскости относительно точки пересечения с прямой 2, так чтобы она пересекла прямую 6. Теперь повернем прямую 4 в вертикальной плоскости относительно точки пересечения с прямой 1, так чтобы она пересекла прямую 5, и прямую 3 относительно точки пересечения с прямой 6, так чтобы она пересекла прямую 4. Аналогично, повернув прямые 1 и 2, добьемся того, чтобы прямая 2 пересекала прямые 1 и 3. Пусть π_1 — плоскость, содержащая прямые 1 и 2, π_2 — плоскость, содержащая прямые 3 и 4, π_3 — плоскость, содержащая прямые 5 и 6. Пусть A', B', C', D', F' — точки пересечения прямых получившейся конструкции, проецирующиеся в точки A, B, C, D, F соответственно. Плоскости π_1 и π_3 пересекают плоскость π_2 по прямым $C'F'$ и $A'D'$ соответственно. Тогда в точке O' пересечения прямых $C'F'$ и $A'D'$ пересекаются все три плоскости π_1, π_2 и π_3, значит, прямая $B'O'$ пересекает прямые 1 и 6 в некоторых точках E'_1 и E'_2. Заметим, что точка E'_2 лежит на отрезке $D'E'$ и, следовательно, лежит ниже плоскости π_1. Это противоречит тому, что прямая $B'O'$ лежит в плоскости π_1. $\square$

c) Докажем сначала, что плетенка, изображенная на рис. 3.d, реализуема. Очевидно, она была бы реализуема, если бы не был задан тип перекрестка в точке E. Рассмотрим семейство прямых, дающее при проекции на горизонтальную плоскость эту конструкцию, возможно, с другим типом перекрестка в точке E. Определим точки $A', B', C', D', F', O', E'_1, E'_2$ и плоскости π_1, π_2 и π_3 так же, как в предыдущем пункте. Прямая $B'O'$ лежит в плоскости π_3, значит, точка E'_1 лежит в плоскости π_3. Тогда в точке E прямая 1 проходит выше плоскости π_3, а значит, и выше прямой 6. Следовательно, конструкция на рис. 3.d реализуема. Теперь проделаем в обратном порядке все преобразования предыдущего пункта. Получим, что плетенка на рис. 3.c тоже реализуема. $\square$

9. Предположим, эта плетенка реализуема. Рассмотрим множество прямых A, дающее при проекции на горизонтальную плоскость эту плетенку. Пусть m_1 и m_2 — прямые в A, проектирующиеся в прямые l_1 и l_2 соответственно, π — плоскость, параллельная прямым m_1 и m_2. Направим ось z "вниз" перпендикулярно плоскости π. Ориентируем все прямые из A, кроме m_1 и m_2, так, чтобы при проходе по каждой из них вдоль ориентации координата z увеличивалась (если какая-нибудь прямая из A параллельна плоскости π, ориентируем ее произвольно). При проходе по любому замкнутому маршруту в соответствии с условиями задачи координата z уменьшается, чего не может быть, так как в итоге мы возвращаемся в исходную точку. Противоречие. $\square$

10. Пример строится следующим образом (см. рис. 10 для $n = 5$). Для $k = 1, \dots, n$ прямая k проходит через точки с координатами $(n-k, 0)$ и $(0, k-1)$. При этом 1 проходит "выше" 2 и n и "ниже" остальных прямых. Для $k = 2, \dots, n-1$ прямая k "выше" $1, \dots, k-2, k+1$ и "ниже" остальных прямых. Прямая n проходит "выше" $2, 3, \dots, n-2$.

Докажем, что все подплетенки реализуемы. В самом деле, после удаления прямой k прямая $k-1$ становится монотонной, а прямая n становится монотонной после удаления 1. Поэтому после выбрасывания любой прямой мы можем одну за другой выбросить все остальные прямые, не меняя реализуемости плетенки, следовательно, наша подплетенка реализуема.

Докажем нереализуемость построенной плетенки. Опустим прямую 1 до пересечения с прямыми 2 и n.

Повернем прямую 2 до пересечения с прямой 3, и т. д., прямую $n-1$ до пересечения с прямой n, прямую n до пересечения с прямой 1. Направим ось z вниз перпендикулярно прямым 1 и n. В результате получим, что z-координата возрастает вдоль каждой из прямых $2,\dots,n-1$ в направлении от прямой 1 к n. Значит, z-координата возрастает в последовательности точек пересечения $1\cap 2$, $2\cap 3$, $\dots$, $n-1\cap n$. Но она равна нулю для точек $1\cap 2$ и $n-1\cap n$. Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.

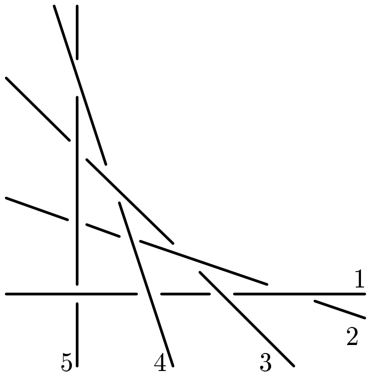

Рис. 10 / Fig. 10

13–15. [ViDr88].

PROJECTIONS OF SKEW LINES

A. Gaifullin, A. Shapovalov, A. Skopenkov and M. Skopenkov

So also werde ich alles in Erinnerung behalten:
Nur ein kleines Album von Miniaturen.
H. Böll, Im Tal der donnernden Hufe.

Introductory problems.

0. A number of closed broken lines in space is projected on a plane so that each segment in space is projected into a separate segment on a plane. The intersections of their projections are drawn so as to show which of the two segments lies above the other. Can the 'projections' in Figure 0 below be obtained this way?

Figure 0.abcde approximately here

1. A number of pairwise skew lines in space are projected on a plane. The intersections of their projections are drawn so as to show which of the two lines lies above the other. Can the 'projections' in Figure 1 below be obtained this way?

Figure 1.abcdefg approximately here

Definitions. Suppose that a number of lines is drawn in the plane so that no three lines intersect in a point, and the intersections are drawn so as to show which of the two lines is "above" the other. Such a (planar!) figure is called a *weave*. Two weaves are *equal*, if one can be obtained from the other by a similitude transformation. A weave is called *realizable*, if it is a projection of a number of pairwise skew lines in space on a plane.

If the formulation of a problem from the list below consists of a statement, then the problem is to prove the statement.

2. Equal weaves are either both realizable or both not.

Definition. A line of a weave is called *monotone*, if it contains a point such that the line is "above" all the other lines on one side of the point, and "below" — on the other side (in particulary, a line that is above all or below all other lines is also monotone).

3. The realizability of a weave is not changed under deletion of a monotone line.

4. a) If a weave consists of 1, 2, or 3 lines, then each line is monotone.

b) If a weave consists of 4 or 5 lines, none of which are monotone, then it is not realizable.

c) There exist a realizable weave consisting of 6 lines none of which are monotone.

d) There exist an infinite sequence of realizable weaves without monotone lines, where each weave consists of different number of lines.

Definition. A subweave of a weave A is a weave obtained from A by deleting some lines.

5. a) A weave containing a nonrealizable subweave is nonrealizable.

b) There exists nonrealizable weave all of whose subweaves are realizable.

c) There exists an infinite sequence of nonrealizable weaves (consisting of different number of lines) all of whose subweaves are realizable.

6.* This is a "phisycal" problem, it is formulated not quite precise mathematically, and strictly mathematical solution is not required. Just try to make an experiment, construct a couple of models and use it to get an answer (but not a rigorous solution) to Problem 1.

a) Suppose we have enough long and thin wooden rods (or strips). Slightly bending the rods, let us construct a model in 3-space of the given weave. Suppose that the construction obtained is rigid, i.e. we can hang it from some point so that it will not fall apart. Then the corresponding weave is not realizable.

b) A weave is realizable if and only if the construction from (a) does not contain any rigid subconstructions.

Problems added at the semi-final.

After the semi-final participants can submit solutions of problems 4.d, 5.c, 6.ab, 7.abc, 8, 8.abc, 9.ab, 10, 11, 12, 13, 14.abcd, 15.abcd.

We shall show an example to Problem 5.c, while the proof can be accepted from a student after the intermediate consideration.

7. The realizability of a weave is not changed under

a) mirror symmetry (i.e. replacing all overcrossings by undercrossings and vice versa);

b)* affine transformations;

c)* projective transformation together with "one-sided mirror symmetry", i.e., replacing all overcrossings by undercrossings and vice versa on one side of the image of the infinite line.

Definition An *isotopy* of a weave is a continious motion of its lines (one can move a line in turn or few lines simultaniously) during which neither initially parallel lines ever become intersecting, nor initially intersecting lines ever becomes parallel nor do any three lines intersect. During the motion the lines remain straight lines. In Fig. 0 and 1 the weaves are given up to isotopy.

8. Consider a weave isotopic to Fig. 1.f and diagonals AD, BE and CF of hexagon $ABCDEF$.

a) If the diagonals intersect at one point as shown in Fig. 3.a, then the weave is not realizable.

b) If the diagonals intersect each other as shown in Fig. 3.b, then the weave is not realizable.

c) If the diagonals intersect each other as shown in Fig. 3.c, then the weave is realizable.

d)* There exist two isotopic weaves one of which is realizable and the other is not. (Hint: see e.g. Fig. 1.f)

9. a) Suppose that there are two lines l_1 and l_2 of a weave such that for any choice of orientations on the other lines we can move along these lines and arrive at the initial point. Here the motion is allowed on the lines along their orientation (on l_1 and l_2 — in any direction) and also from one line to another in their intersection point, if the first line is "above" the second. Then this weave is not realizable.

b)* A weave is *acyclic*, if it does not satisfy the condition of (a). Is it true that for any acyclic weave there exist a realizable weave isotopic to it?

10. For each integer $n \geq 4$ there exists a nonrealizable weave, consisting of n lines, all whose subweaves are realizable.

11.* There exists an infinite sequence of realizable weaves where each weave is neither isotopic to another one nor to a subweave of another one.

12. Suppose that each line of a weave is parallel either to x-axis or to y-axis. Find a criterion for the realizabiliy of such weaves (cf. Problem 1.g).

Definition. Consider collections of oriented lines in the space up to changing the orientations of all lines. An *isotopy* of such a collection is a continious motion of the lines during which they remain pairwise skew.

13. If $p = 4k + 3$, $k \in \mathbb{Z}$, then any collection of p pairwise skew lines in space is not isotopic to its mirror image (hint: see problems 14 and 15).

Definition. Suppose that we are given pair of oriented skew lines. Project the pair on a general position plane. If the obtained oriented weave is as shown in Fig. 4.a, then *the linking coefficient* of the pair equals -1, otherwise +1.

14. a) The linking coefficient is well defined and is preserved under changing the orientions of both lines.

b) The linking coefficient of a pair is preserved under isotopy.

c) Two pairs of oriented skew lines are isotopic if and only if their linking coefficients coincide.

d)* Two triples of oriented pairwise skew lines are isotopic if and only if their pairwise linking coefficients coinside.

Definition. The linking coefficient of an ordered triple of oriented pairwise skew lines is the product of the three pairwise linking coefficients.

15. a) The linking coefficient of a triple does not depend on the choice of the order and orientations of the lines.

b) The mirror symmetry of space changes linking coefficient of a pair and that of a triple.

c) Figure consisting of p lines contains $p(p-1)(p-2)/6$ triples of lines.

d) The number $p(p-1)(p-2)/6$ is odd if and only if p is of the type $4k + 3$, $k \in \mathbb{Z}$.

Historical note. This collection of elementary problems appeared in *algebraic knot theory*. The main results of this collection are Problems 5.c (A. Skopenkov, 1989) and 8 (G. Galperin and A. Skopenkov, 1988; this result was not published earlier). Intersting unsolved problems are 9.b, 11 and 12.

Acknowledgements. We would like to thank A. B. Sossinski for his help in English translation and A. Talambutsa for useful discussions and A.Kulygin for preparing computer version of the figures.

Solutions given at the semi-final.

0. a), c) The answer is yes.

b), d) The answer is no. Assume that the plane ABC is horisontal. Then one can find out consequently if each endpoint or intersection point lies under or over the plane ABC. So one can obtain a contradiction.

1. a),b) The answer is yes, which follows from Problem 3.b. $\square$

c) [Tab88] The answer is no. Assume that there exists the required configuration (Fig. 1.c). Clearly, we can move line 1 in the vertical plane without touching line 3, until line 1 will cross lines 2 and 4 (Fig. 5). Then in the same way we can move line 3 until it will cross lines 1 and 4. Finally, in the vertical plane we can rotate line 2 with respect to the intersection point of lines 1 and 2 until it will cross line 3. After this motion all the four lines belong to the same plane. On the other hand, throughout these motions line 2 remains passing 'below' line 4, which is a contradiction. $\square$

d) The answer is no. This weave contains the weave of 1.c as a subweave. $\square$

e) The answer is no. Assume that there exist the required configuration. Turn line 3 in the vertical plane until it will cross one of lines 1 or 5. If line 3 will first cross line 1, then in the vertical plane turn line 3 with respect to the intersection point of lines 1 and 3 until line 3 will cross line 4. If line 3 will first cross line 5, then in the vertical plane turn line 5 with respect to the intersection point of lines 3 and 5 until line 5 will cross line 1. The obtained configuration of lines 1, 2, 4 and 5 (in the first case) and lines 1, 2, 3 and 5 (in the second case) coinsides up to numeration with the configuration obtained in the solution of Problem 1.c after motion of line 1 until it will cross lines 2 and 4. Consequently, the configuration is impossible.

f) The answer is yes. Clearly, after deleting the line 2 the weave becomes realizable. Consider 5 lines m_1, m_3, m_4, m_5, m_6 in the space, whose projections into the horizontal plane form Fig. 1.f with the line 2 deleted. Let m_2 be the line which crosses the lines m_3 and m_5 and is projected onto the line 2. Move line 2 in the direction of the intersection point of lines 3 and 5 so that it remains parallel to itself. Move line m_2 so that it remains crossing lines m_3 and m_5 and being projected onto the line 2. After some time the line m_2 will be "above" the line m_6 and "below" the lines m_1 and m_4. Turn line m_2 in the vertical plane so that it will pass "below" line m_3 and "above" line m_5. Thus we obtain the required collection of lines $m_1, \dots, m_6$ whose projection into the horizontal plane is the weave isotopic to the given weave. $\square$

g) [Tab88] The answer is no. Assume that the weave is realizable. Moving the lines in the vertical planes as in the solution of Problem 1.c, we can obtain the configuration where each of the lines a, b, c crosses each of the lines l_1, l_2, and l_3 crosses a and b (Fig. 6.a). Let $A_1, A_2, \dots, C_2$ be the intersection points of the lines a and l_1, a and l_2, $\dots, c$ and l_2; the projections of the points into the weave plane are denoted by the same letters. Project the whole configuration into the vertical plane λ, containing the line l_3, along the line c (Fig. 6.b). Denote by C the point which is an image of the line c. Let us prove that $C \in l_3$; then the lines c and l_3 intersect, which contradicts our assumption. The vertical planes containing the lines a, b and c are parallel (because the projections of the lines a, b and c on the weave plane are parallel), therefore the projections of a and b along c on the plane λ are parallel. In addition, in the weave we have $A_1A_2 : A_2A_3 = B_1B_2 : B_2B_3$, consequently, this is true for the configuration itself, and hence — for Fig. 6.b (if XY is parallel to $X'Y'$, then the value $XY : X'Y'$ is preserved under a parallel projection). This yields that in Fig. 6.b the line A_3B_3 contains the point C, thus the claim is proved. $\square$

2. Let P_1 and P_2 be a pair of equal weave s in a horizontal plane, f a similitude transformation of the plane, carrying P_1 to P_2. Then f extends to a similitude transformation F of space. Let P_1 be a realizable weave and A_1 a number of lines in space giving the weave P_1 in the projection on the horizontal plane. Then the lines $A_2 = F(A_1)$ form the weave P_2 under the projection on the horizontal plane. Consequently, P_2 is also realizable. $\square$

3. Let P be a weave with a monotone line and P' the weave obtained from P by deleting this line. Clearly, if P is realizable, then P' is realizable. Let us prove the converse statement. Assume that P' is realizable. Consider the corresponding configuration of lines in space. Mark a point in the monotone line such that on one side from the point the line is "above" the others and on the other side — "below" the others. Draw a vertical line through this point and bend the line a bit in the vertical plane containing the monotone line. Thus we obtain the required configuration of lines giving the weave P in the projection into the horizontal plane. $\square$

4. a) It is obvious because each of the lines of the weave crosses only two other lines of the weave. $\square$

b) Any weave consisting of 4 lines which are not monotone is isotopic either to the weave in Fig. 1.c or to a weave symmetric to it with respect to some axis, and hence is not realizable. Any general position collection of 5 lines in the plane is mapped to a "five ray star" by a projective transformation. Any such weave consisting of 5 nonmonotone lines either contains a subweave of 4 nonmonotone lines or consides up to isotopy and mirror symmetry with the weave in Fig. 1.e. In any case our rag is not realizable. $\square$

c) For example, the weave in Fig. 1.f. $\square$

5. a) It is clear. $\square$ b) For example, the weave in Fig. 1.c. $\square$

Solutions of the problems suggested after the semi-final.

4. d) Let us prove by induction over n that for $n > 1$ there exists a realizable weave consisting of $3n$ lines which are nonmonotone. For $n = 2$ this follows from Problem 1.f. Let $n > 2$ and let P be a weave consisting of $3n - 3$ nonmonotone lines. Draw a line l in the plane of the weave P such that l is not parallel to any line of the weave and does not contain any intersection point of the lines of the weave. Let A and B be two of the intersection points of l and the lines belonging to P, such that the other intersection points are between A and B. Add three close to l lines to the weave such that the three lines intersect in three points close to the extension of the arc AB after the point B. Draw the undercrossings and overcrosings as follows: in the intersection points of the three lines — as in Fig. 1.a, in the intersection points of the three lines and the line of P, crossing l in the point A, they are "below", and in the other intersection points — "above". The obtained weave of $3n$ lines does not contain monotone lines, but is clearly realizable. $\square$

5. c) Let us construct the sequence of weaves L_n with the required property. The weave L_n consists of $2n + 1$ lines. In Figures 1.e, 7 and 8 the weaves L_2, L_3 and L_4 are shown. Notice that the intersection of each line of L_n with the other lines is of the following type: first the line goes $(n - 1)$ times "below", then one time "above", next again "below" and finally $(n - 1)$ times "above" (Figure 9).

Let us prove nonrealizability of the weave L_4. In the general case the proof is analogous. Turn line 1 in the vertical plane around the point, which is projected into the intersection point of lines 1 and 2, until it crosses line 2. Turn line 2 until it crosses line 3, and so on, turn line 9 until it crosses line 1. Let us prove that the obtained configuration is not realizable. Let the z-axis look downward and let it be ortogonal to the lines 1 and 2. Denote by p the plane containing lines 1 and 2. Let us prove that the z-coordinate increases along lines 3,4 ..., 9 in the clockwise direction around the central 9-gon. Thus we obtain a contradiction. First we prove this for the lines 3, 4, 5. It suffices to note that the intersection point of each of the lines 3, 4, 5 and the line 1 is above plane p, and each of lines 3, 4, 5 crosses the 9-gon not above plane p (for line 3 it is clear, for the other lines follow by induction). The proof for lines 9, 8, 7 is analogous. Now it suffices to note that line 6 is above the line 1 and below the line 2, and the weave is not realizable.

Note that after deleting l_{n+1} the lines l_n and l_{n+2} become monotone. Similarly, then after deleting l_{n-k+2}, l_{n+k} the lines l_{n-k+1}, l_{n+k+1} become monotone. By Problem 3.b it follows that the weave obtained from L_n by deleting the line l_{n+1} is realizable. $\square$

Figures 7-9 approximately here

7. a) It is obvious, because one can make the mirror symmetry of the configuration realizing a given weave with respect to the plane of the weave. $\square$

b) The solution is analogous to the solution of Problem 2. $\square$

c) Any projective transformation is the composition of an affine transformation and a central projection of a plane onto another plane in space. Thus we may assume that our transformation is a projection of the plane π onto the plane π' with the center at the point $O \notin (\pi \cup \pi')$. Let A be a number of lines in space giving the weave P in the projection into the plane π. We may assume that A belongs to a small neighbourhood of the plane π. The projection of π into π' with the center O extends to a projective transformation f of space. Denote by l the intersection line of the plane π' and the plane parallel to π and containing the point O. then l is the f-image of one of the infinite lines. Suppose that a line $n \in A$ is "above" a line $m \in A$. Then the line $f(n)$ is above $f(m)$, if the intersection point of their projections into the plane π' is on one side with respect to l, and is "below" — if it is on the other side. Thus the weave which is the result of the transformation is also realizable. $\square$

8. a),b) Assume that there exists the required configuration. Turn line 2 in the vertical plane with respect to the point, projecting onto the intersection point of projections of lines 2 and 6, until line 2 crosses line 5. Similarly turn lines 4 and 6 until they cross lines 1 and 3, respectively. Turn line 5 in the vertical plane with respect to the intersection point of lines 5 and 2 until line 5 crosses line 6. Analogously turn 4 w. r. t. $4 \cap 1$ until 4 crosses 5, turn 3 w. r. t. $3 \cap 6$ until 3 crosses 4. Similarly turn lines 2 and 1 until they cross lines 3 and 1, respectively.

Let A', B', C', D' and F' be the intersection points of the lines, projected onto points A, B, C, D and F, respectively. Let O' be the intersection point of segments $A'D'$ and $C'F'$. Let π_1, π_2 and π_3 be the planes containing lines 1 and 2, lines 3 and 4, lines 5 and 6, respectively. Then $C'F' = \pi_1 \cap \pi_2$ and $A'D' = \pi_2 \cap \pi_3$. So $O' = \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$. Therefore line $B'O'$ intersects lines 1 and 6. Let E_1' and E_6' be the intersection points of line $B'O'$ with lines 1 and 6, respectively. Note that point E_6' belongs to segment $D'E'$ and to plane π_1. On the other hand segment $D'E'$ does not intersect plane π_1, which is a contradiction. $\square$

c) First let us prove that the configuration shown in Fig. 3.d is realizable. Evidently it would be realizable if the type of intersection in point E would not be prescribed. Consider the corresponding configuration of lines in space. Define points A', B', C', D', F', O', E_1', E_2' and planes π_1, π_2 and π_3 as in the solution of the previous problem. We have $E_1' \in \pi_3$. Therefore at point E line 1 passes above plane π_3. Hence line 1 passes above line 6 at point E. So the configuration shown in Fig. 3.d is realizable. Make for this configuration all the rotations from the solution of the previous problem in the inverse order. Thus we obtain a configuration which is a realization of the given weave. $\square$

9. Assume that this weave is realizable. Consider a number of lines A realizing the weave. Let m_1 and m_2 be the lines of A being projected onto the lines l_1 and l_2 respectively, let π be a plane parallel to the lines m_1 and m_2. Let the z-axis 'look downward' and be ortogonal to the plane π. Orientate of line of A except m_1 and m_2 by the following rule: if one moves in the direction given by the orientation, the z coordinate increases (if a line of A is parallel to π, then choose any of the two orientations). Then after the motion permitted by the problem the z coordinate increases, that is impossible, because we arrive at the initial point. This contradiction proves the claim. $\square$

10. The example is constructed as follows (see Fig. 10 for $n = 5$). For $k = 1, \dots, n$ take line k passing through the points $(n-k, 0)$ and $(0, k-1)$ of the Cartesian coordinate system. Let line 1 be "above" lines 2, n and "below" the other lines. For $k = 2, \dots, n-1$ let line k be "above" lines $1, \dots, k-2, k+1$ and "below" the other lines, let line n be "above" lines $2, 3, \dots, n-2$.

Let us prove that all subweaves are realizable. Indeed, after deleting line k line $k-1$ becomes monotone, and line n becomes monotone after deleting line 1. So after deleting any of the lines we can delete monotone lines of the remaining weave one after another, hence the subweave is realizable.

Let us prove that the constructed weave is not realizable. Take a collection of lines in 3-space projecting onto our weave. Move line 1 down until it crosses lines 2 and n. Turn line 2 until it crosses line 3, and so on, line $n-1$ until it crosses line n, line n until it crosses line 1. Take z-axis looking downward and let it be orthogonal to lines 1 and n. Then z-coordinate increases along each of the lines $2, \dots, n-1$ in the direction from line 1 to line n. Therefore, z-coordinate increases in the sequence of the intersection points of lines 1 and 2, 2 and 3, ..., $n-1$ and n. But this coordinate equals 0 for the intersection points of the pairs of lines 1 and 2, $n-1$ and n. This contradiction proves the claim.

Figure 10 approximately here

13–15. See the paper by Viro and Drobotukhina, Kvant, 1988, 3, 12–19.