Охота на Снарка

Булочник охотится на Снарка на бесконечной клетчатой плоскости. Снарк за один ход может прыгнуть с клетки (x, y) на любую клетку (x', y'), где $|x - x'| \leqslant n$, $|y - y'| \leqslant n$. Число n называется *скоростью* Снарка. Булочник своим ходом может положить булочку на любую пустую клетку. Снарк ненавидит булочки, поэтому он никогда не прыгает на клетку с булочкой. Цель Булочника — запереть Снарка, так чтобы ему некуда было прыгнуть. Цель Снарка противоположна.

0. Докажите, что Булочник может запереть Снарка силы 1.

1^{**}. **(Открытая проблема)** Хотя бы для какого-нибудь одного $n > 1$ выясните, кто сможет добиться поставленной цели: Булочник или Снарк.

Мы предлагаем несколько более простых вопросов про охоту на более примитивных Снарков.

ε. Пусть Снарк каждым ходом увеличивает ординату ($y' > y$). Докажите, что Булочник может его запереть.

2ε. Пусть Снарк на каждом ходе не уменьшает ординату $y' \geqslant y$. Докажите, что Булочник может его запереть.

3ε. Пусть Снарк, однажды достигнув клетки (x, y), уже никогда не прыгает на клетки с ординатой, меньшей $y - 1\,000\,000$. Докажите, что Булочник может его запереть.

4ε. Пусть Снарк каждым ходом увеличивает расстояние до начала координат. (Расстоянием до начала координат называется $\max\{|x|, |y|\}$.) Докажите, что Булочник может его запереть.

5ε. Пусть Снарк, однажды достигнув расстояния d от начала координат, никогда более не приближается к началу координат ближе, чем на $d - 1\,000\,000$. Докажите, что Булочник может его запереть.

1/2001. Предположим, что Снарк подозрителен, и если он однажды мог прыгнуть на клетку, но не сделал этого, то никогда больше он на эту клетку не прыгнет. Докажите, что если Булочник может поймать подозрительного Снарка, то он может поймать и обыкновенного Снарка той же скорости.

Теперь охота происходит в пространстве, разделённом на кубики.

δ. Пусть Снарк каждым ходом может перепрыгнуть на любой соседний по грани кубик (шесть возможных ходов). Докажите, что Булочник может его запереть.

$1 - \delta$. Пусть Снарк за один ход может из кубика (x, y, z) прыгнуть в любой кубик (x', y', z'), где $|x - x'| \leqslant 1$, $|y - y'| \leqslant 1$, $|z - z'| \leqslant 1$ (26 возможных ходов). Может ли Булочник запереть Снарка?